超结构化四边形网格的 160 个研究问题

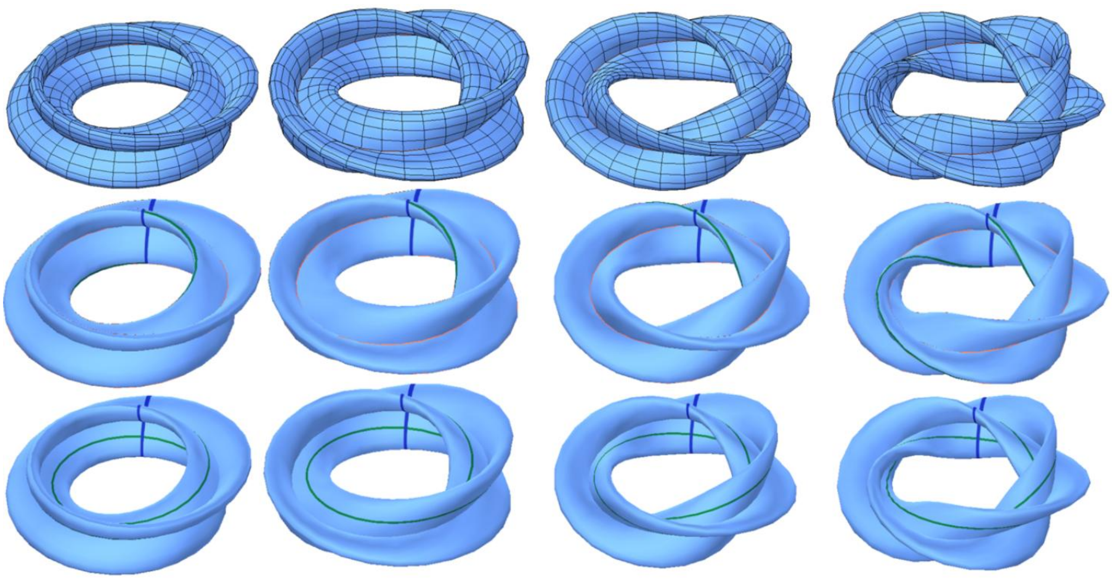
赵 辉

（可计算离散整体几何结构实验室，graphicsresearch@qq.com，北京）

2025 年 10 月 1 日

摘要：作者提出的四边形整体排列结构可设计可控的“超结构化四边形网格”是一个全新的研究方向，实现超结构化四边形网格的科学问题命名为“灵山问题”，此问题的命名在第九届网格方桌会议上公布。而解决“灵山问题”需要二维黎曼面上的前沿微分几何拓扑理论、计算机算法设计、代码编程技术、可视化渲染技术、工业上的具体应用等等从最左端的抽象阶段到最右端的工业产品等一系列的数十个价值观、研究模式都不同的研究环节。本文列举对解决“灵山问题”，实现超结构化四边形网格有潜在作用的具体研究问题。这些问题分散在不同的环节里，具有不同的性质，本文预期通过这些问题的解决，不仅仅解决超结构化四边形网格生成的“灵山问题”，而且能够促进抽象数学到工业应用的交叉融合，以及来源于工业上应用的动机促进微分几何拓扑理论更广泛研究。

关键词：跨学科，网格，超结构化四边形网格，灵山问题，可视化，等几何，有限元，T-样条，曲面映射类，模空间，泰希米勒空间，黎曼面、Thurston、曲面上的方块平铺、Ribbon-graph



（图 1：最简单的超结构化四边形网格：脐环面 Umbilic Torus。）

（Figure 1：The Simplest Super Structured Quad Mesh： Umbilic Torus.）

1. 可计算离散整体几何结构

可计算离散整体几何结构（Computational Discrete Global Geometric Structures）指的是本文作者提出的设计算法捕获各种整体几何结构的“整体属性”的研究方向。

整体几何结构指的是纤维丛上的各种几何结构，过去几十年，数学家发展了数十上百种不同类型的整体几何结构，它们是比拓扑更精细的几何结构。本文作者提出的“可计算离散整体几何结构”全新研究方向和研究内容，旨在通过离散化、算法设计和可视化，将整体几何结构的理论潜力释放到工程技术中。可计算离散整体几何结构研究内容包括三个方面：

（1）研究算法设计和代码实现构造各种整体几何结构，从而捕获它们的整体属性；

（2）对各种整体几何结构进行可视化，如下图所示；

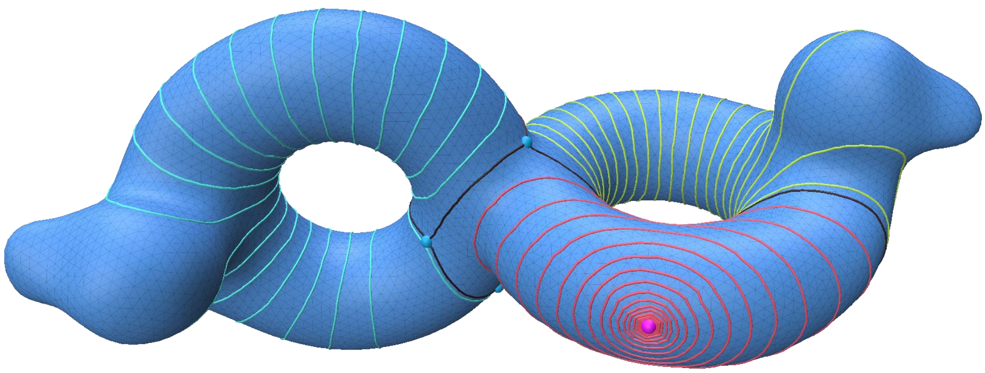
（3）把这些构造性算法带来的新工具应用到各种高精尖工业应用中。

“可计算离散整体几何结构”这个全新的研究方向认为很多关键的科研领域都是在围绕“整体几何结构”进行，例如：

(1)数学家用“抽象思维”的工具来证明整体几何结构的存在性，例如卡拉比-丘空间；

(2)物理学家用“物理实验”的工具来构造各种整体几何结构，例如基本粒子、电磁波等等；

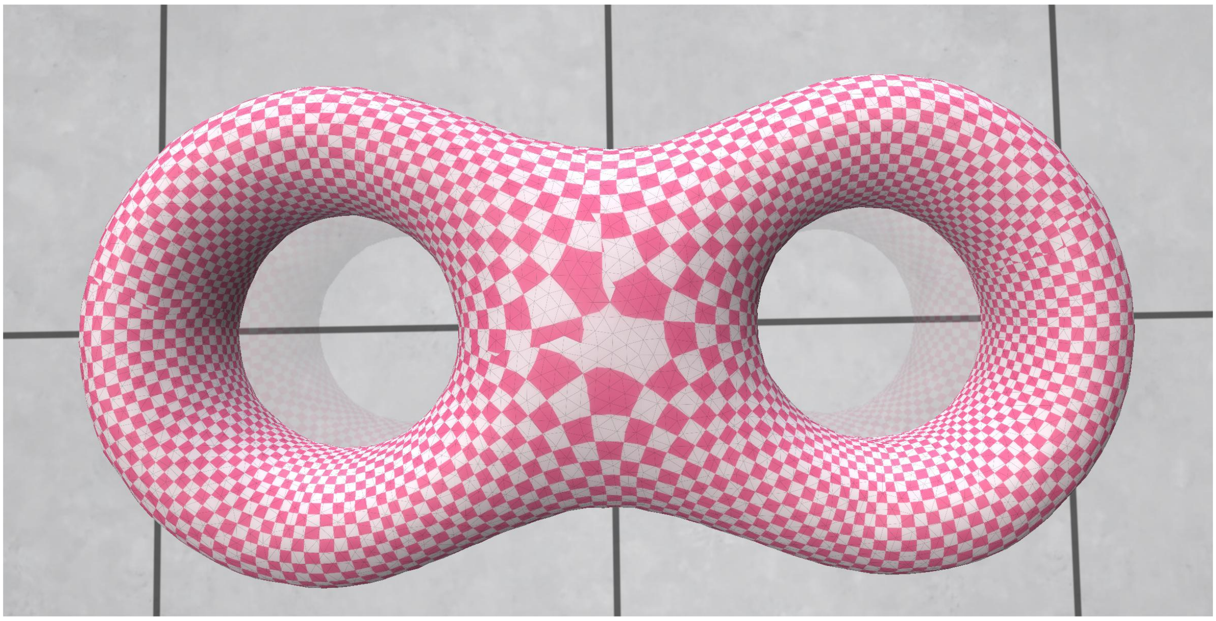
(3)随着计算机软件、硬件、求解器等各种技术的成熟，近年来，本文作者提出用“算法”来构造数学家发展出来的整体几何结构。



（调和叶状整体几何结构：赵辉用 Geometric 作图。）

可计算-离散-整体几何结构名称里面的“可计算”名词不是指的输入公式和方程，然后计算该公式和方程的数值，而是要用“算法”来抓住整体几何结构里用单个方程无法表示的整体属性。这就是“算法”和“计算”的区别，算法可以做到计算思维无法做到的事情。

研究整体几何结构的存在性和构造性有很多抽象研究工具，例如几何分析、偏微分方程、符号计算等工具和方法。本文作者提出用“算法”捕获，是一个研究整体几何结构工具和思维上的创新，是随着计算机软硬件、函数库、求解器、渲染技术等的逐渐发展成熟，而出现的。



（全纯二次微分整体几何结构：赵辉用 Geometric 作图。）

可计算-离散-整体几何结构研究方向的提出核心是从抽象数学视角认识到“整体几何结构”算法构造的重要性，以及从算法的视角，认识到研究“整体几何结构”的重要性。价值观不是证明整体几何结构更多的数学定理，而在于对其进行“算法设计”和“应用”。

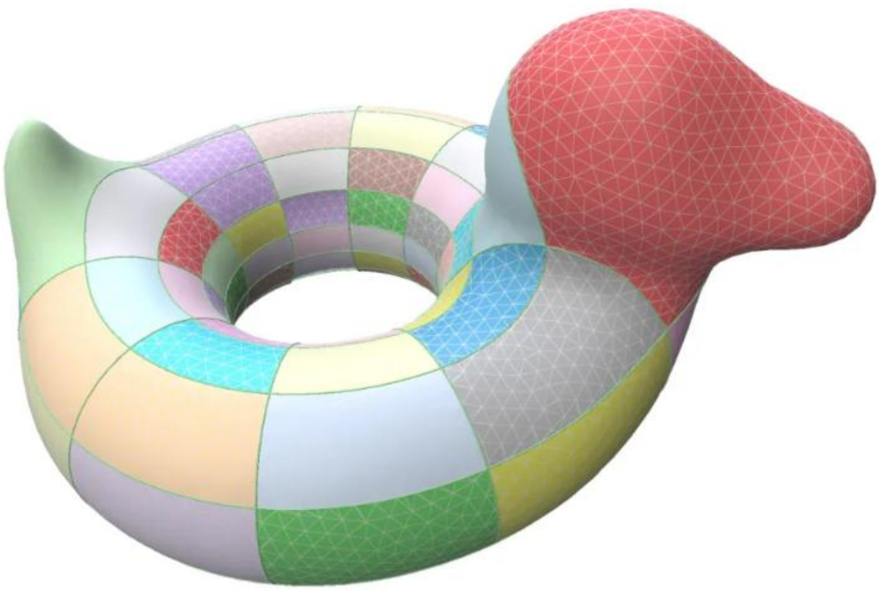
可计算-离散-整体几何结构研究的价值观把“可视化”做为必要条件，做为研究对象，而不是副产品，这是和该领域的发展从计算机图形学出发的历史分不开的。全新的研究领域需要对应的全新的价值观、研究目标、研究逻辑、研究工具、研究方法。

因此实验室举办了数十所高校、研究机构接龙接力的可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展活动，把整体几何结构和艺术行为结合起来，真正把数学+艺术这个加法成功的加上了，而不是两个独立的模块仅仅是放在一起。

可计算离散整体几何结构以明确的研究纲领、创新的研究目标、交叉的研究内容，必能抓住前沿科研的发展历史脉络和未来趋向，推进科技的发展。

2.超结构化四边形网格

作者在可计算离散整体几何结构这个全新研究方向的基础上，提出了二维网格上的四边形整体排列结构可控可设计的超结构化四边形网格（Super Structured Quad Mesh）的研究方向和研究领域。超结构化四边形网格需要应用到以菲尔兹奖得主 Thruston 教授为代表的二维黎曼面上的各种前沿几何拓扑理论。解决超结构化四边形网格的问题被本文作者命名为“灵山问题”，在第九届网格方桌会议上正式发布。



（超结构化四边形网格，Geometric 作图。）

当前，所有学者都认同一个论点：“前沿基础数学是高精尖技术发展的发动机”。但是对于如何实现这个论断尚需要开拓探索。例如当前工业软件领域的专家和微分几何学拓扑专家尚未在具体的 CAD-CAE-CAM 工业软件技术上进行实质性的联合科研。有很多原因，其中之一是工业软件领域专家不了解，也没有办法在有限时间了解前沿几何拓扑理论，而几何学家同样也没办法在有限时间了解工业技术难题的细节，并和自己的研究关联起来。

针对当前工业软件技术存在的难题，本文作者提出需要应用二维黎曼面上前沿几何拓扑理论来解决。例如下面的理论：

1.模空间、

2.泰希米勒空间、

3.曲面上的动力系统、

4.Ribbon-Graph、

5.调和叶状结构、

6.全纯二次微分、

7.亚纯二次微分、

8.Thurston 范数、

9.平移曲面（Translate surface）、

10.半平移曲面（Half translation surface）、

11.平直曲面（Flat surface）、

12.黎曼面（Riemann surface）、

13.曲面的方块平铺（Square-tiled surfaces）、

14.Masur-Veech 体积、

15.曲流形（Meanders）、

16.台球（Billiards）、

17.区间交换（Interval exchange）、

18.Teichmuller 流、

19.阿贝尔微分与二次微分的层（Strata of abelian and quadratic differentials）、

20.曲面上的方块平铺（Square-Tiling）、

21.曲面映射类、

22.。。。。。。

超结构化四边形网格研究的是二维网格，对应的是二维曲面，因此所需要关注的是研究重点在二维曲面上的相关几何学家，例如下面包含数个菲尔兹奖得主在内的学者：

(1)瑟斯顿（Bill Thurston）、

(2)柯蒂斯·麦克马伦（Curtis McMullen）、

(3)Maxim Kontsevich、

(4)玛丽安·米尔札哈尼（Maryam Mirzakhani）、

(5)Anton Zorich、

(6)Alex Eskin、

(7)Scott A. Wolpert、

(8)Howard Masur、

(9)Benson Farb、

(10)Alex Wright、

(11)Vincent Delecroix、

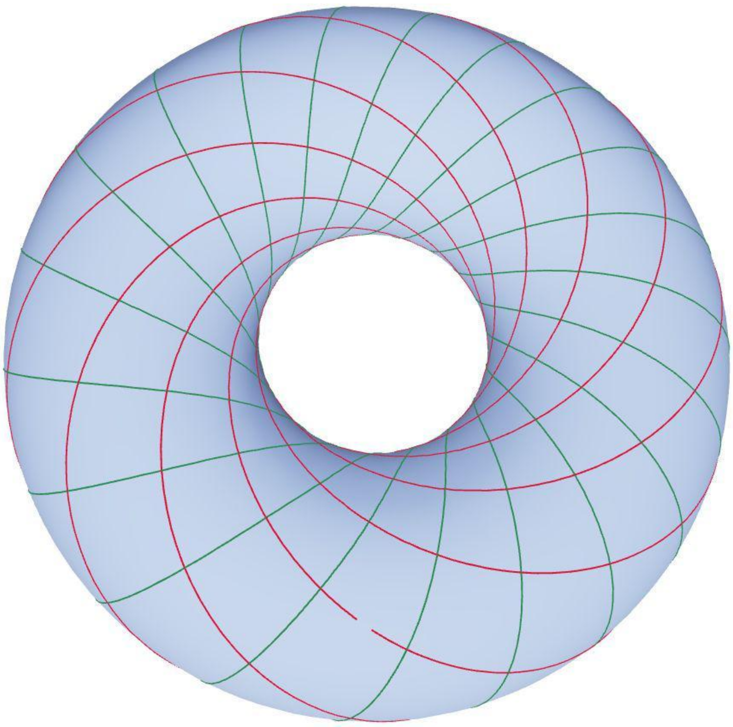
(12)Jayadev S. Athrey、

(13)Carlos Matheus、

(14)。。。。。。。

上述罗列的几何学家和几何理论不是全部内容，只是提供一个可以开头进行查找的基础，进而可以根据这些理论和几何学家文章的引用，得到更多的相关学者和更多的理论。

超结构化四边形网格的研究方向是以“落地”为目标，以 CADCAE 工业软件上的应用为驱动，为动机来源。



（超结构化四边形网格，Geometric 作图。）

3.脐环面 Umbilic Torus

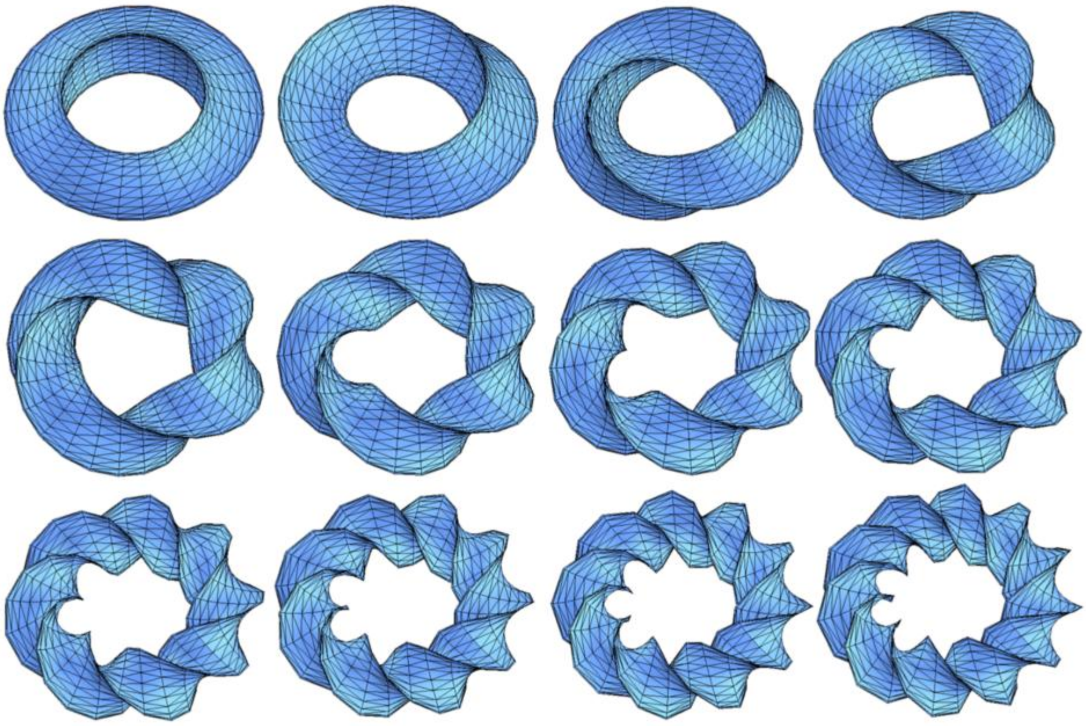
最简单的超结构化四边形网格是脐环面 Umbilic Torus，可以用公式生成。从这个特殊的样本，可以形象的展示作者提出的四边形网格生成的研究创新：

(1) **四边形网格生成要先考虑整体排列结构；**

(2) **在整体排列结构确定情况下，再考虑特征线等局部几何约束；**

(3) **也就是在固定了整体排列结构之后，采用某种优化方法，使得四边形网格满足各种局部几何条件；**

(4) **从而整个流程采用先整体后局部的方法来解决工业技术上四边形网格生成的难题。**



（脐环面 Umbilic Torus。）

但是高亏格上曲面上，超结构化四边形网格就没有公式可以生成，因此需要研究“算法”来生成四边形整体排列结构可控可设计的结果，这就是超结构化四边形网格研究内容。而要研究超结构化四边形网格，需要以可计算整体几何结构的研究方式，以整体几何结构为核心进行研究。

4.研究模式

超结构化四边形网格是一个全新的跨学科、交叉学科的研究方向、研究领域，不是一个单个的算法，也不是一个课题组，一个实验室能够解决，而需要进行长期的各种不同方式研究。

历史上，对于这种性质的研究局面，很多学者通过罗列一些研究问题的方式进行推动科研，例如：

(1) 1900 年 8 月，在巴黎国际数学家代表大会上，希尔伯特提出 23 个最重要的数学问题。

(2) 例如菲尔兹奖得主 Thurston 对三流形研究领域提出的 24 个问题：

1) William P.Thurston. (1982). Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bulletin of the American Mathematical Society.

2) William P. Thurston.（1988）On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfacesBull. Amer. Math. Soc. (N.S.).

(3) 例如 1979 年 9 月，丘成桐教授在普林斯顿高等研究院举办“特别年”（special year），对于几何分析研究领域提出的 120 个问题。陈省身先生认为这是为该领域的学者做出贡献的最佳方式之一。正如美国发明家 Charles Kettering 所言：“问题一旦妥为陈述，已经解决了一半”（A problem well stated is a problem half-solved）。

1) Yau, Shing Tung Problem section. Seminar on Differential Geometry, pp. 669--706, Ann. of Math. Stud., 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982.(120 problem sections)

2) Yau, Shing-Tung Open problems in geometry. Differential geometry: partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990), 1--28, Proc. Sympos. Pure Math., 54, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

上面这个几个例子都是数学领域的方式，都是在价值观、研究工具、研究方法、研究环境都比较成熟，有稳定模式的情况下，研究人员对上下文有共识的情况下进行的方式。

而超结构化四边形网格是一个交叉学科研究方向，从最左边抽象数学，到中间计算机算法，到最右边应用软件等十多个环节的价值观，研究逻辑都不一样。因此本文对超结构化四边形网格研究领域提出的 160 个问题，还需要考虑建立适合这个新研究方向的全新价值观、研究逻辑。因此和上述三种问题的模式有一些区别，开展研究工作的方式也需要适合这个新领域的特点。

本文问题的性质各种各样，不仅仅是抽象的数学问题，也不仅仅是实战的应用问题，大致有如下一些类别：

(1) 相关几何拓扑理论的综述。超结构化四边形网格研究需要大量的几何拓扑理论，及其应用，但是这些理论的描述当前都是面向数学家的方式，因此需要以面向算法、面向应用的方式重新组织语言，通过**详细图示**等进行综述（Survey），从而使得后面的应用科学家能够快速了解和掌握。类似应用之前欧美有很多学者写的“面向工程师的线性代数、面向物理学家的微分几何”之类的书籍。综述重点不在于数学证明严谨性，而在于形象描述结论。这样的综述可能就会形成 20 个问题。

(2) 对二维黎曼面、模空间上的各种几何拓扑理论进行算法研究。这类占了一大部分问题。超结构化四边形网格研究领域不是针对某一个理论，然后直接得到结果，而是需要综合很多理论，找到能够适合当前计算机软硬件、函数库算出具体数值的方法。

(3) 对相关整体几何结构进行可视化研究。二维流形上的很多几何结构适合在三维空间里进行视觉呈现，但是需要研究算法、利用计算机图形学渲染技术进行实现。可视化是超结构化四边形网格研究的必要组成部分，因为可以给此领域的研究提供源源不断的动机（Motivation）。超结构化四边形网格的研究需要数十个环节接力，因此如果没有源源不断的动力，很难支撑。

(4) 对于超结构化四边形网格在工业软件应用技术上的作用的研究。例如超结过婚四边形网格和等几何分析、样条曲面、有限元计算、T-样条等关键技术的作用的研究。这些是软件开发技术面向的问题，需要以工业软件的开发的价值观进行设计。

(5) 超结构化四边形网格和六面体网格关系的研究。例如超结构化四边形网格的整体结构能否决定六面体网格的整体结构，六面体网格是否需要三流形的理论等等。

(6) 超结构化四边形网格和工业应用的研究。例如超结构化四边形网格对于发动机叶片设计和仿真的影响，对于汽车、轮船设计等其他高精尖应用仿真的收敛性、精度的影响等等。

(7) 超结构化四边形网格和数值计算函数库、求解器的数值分析研究。超结构化四边形网格研究目的是“落地”，也就是能够在当前计算机软硬件、函数库、求解器条件下，计算出具体的数值，而不是仅仅理论上证明了可以。因此需要对于求解器、函数库在算法上的具体计算效果进行研究，有时候同一个算法，换一个求解器可能就不能稳定的算出来。这个“落地”的价值观非常关键，没有这个，很容易就变成抽象数学范畴，无法从应用中得到巨大的驱动和动机。

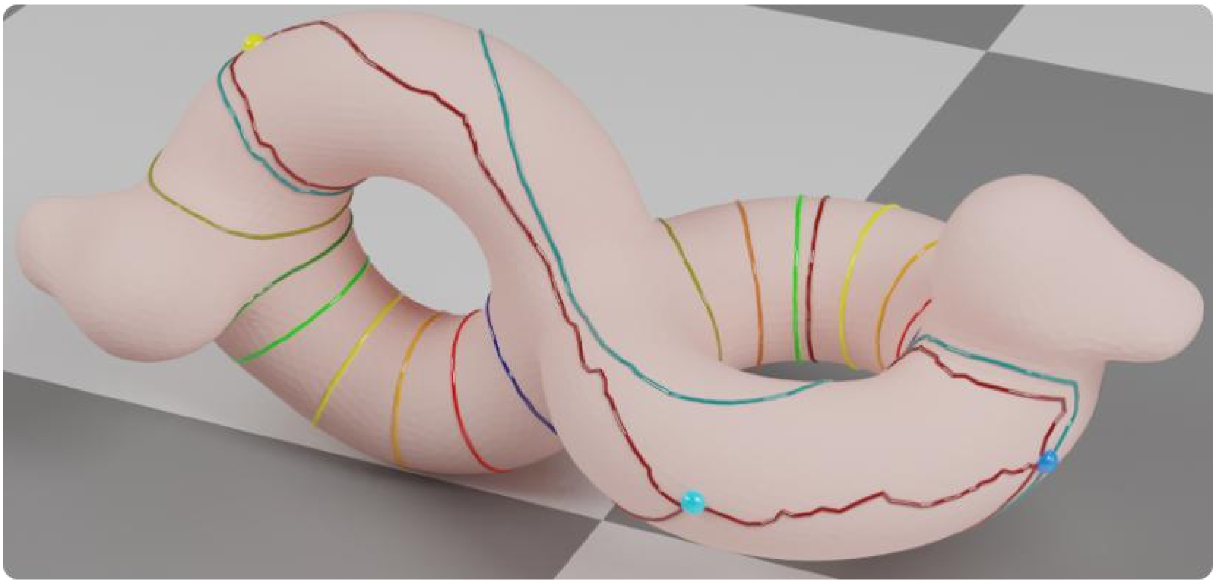
(8) 代码和软件开发。为了描述、学习、研究某个具体问题，需要把相关算法开发为可用的软件形式，避免其他人重新发明轮子。

这些问题的价值观都不一样，但是环环相扣，能够打通抽象数学到应用的通道。超结构化四边形网格这个全新研究领域能够成立、能够持续一直发展的基石就是：

1）具有强大的 CADCAE 工业软件和应用驱动，

2）具有可视化视觉刺激驱动。

反过来，持续不断地、充分的对数学理论的应用，带来更多的从业人员，也必将促进整个交叉学科所有环节里面最前面抽象数学的研究。这些交叉学科的充分融合的因素都构成了超结构化四边形研究领域蓬勃发展的生命力。



（Ribbon-Graph 和调和叶状结构可视化，赵辉用 Geometric 作图。）

一个全新研究领域从提出到发展到成熟，具有自己的成长路径，也会给科研带来一些新的模式，新的逻辑，新的动机，新的研究方法。本文提出的 160 个超结构化四边形网格的研究问题，每一个问题都可以作为一个博士论文题目进行研究，需要解决从数学理论、到算法设计、到数值计算、到数据实验等一系列的研究难题。

本文的 160 个问题，每一个问题的成果表现方式可以是研究文章（Research paper），也可以是 Technical report，也可以是 Note，Survey 等形式。

超结构化四边形网格能够把巨大的工业应用和过去四十年数学家发展出来的前沿几何拓扑理论联系起来的关键是以“算法”为桥梁，特别是以“整体几何结构”的算法思维为基石，这就是这个全新研究领域的特点。

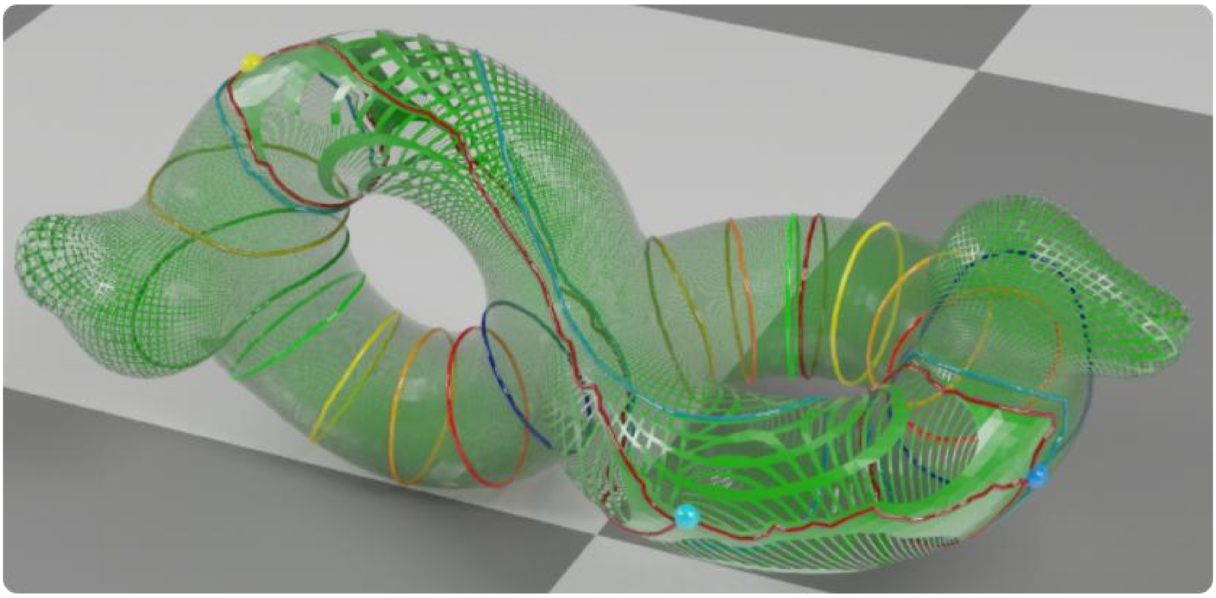
工业软件及其应用这边有数百万从业工程技术研究人员，随着这些应用带来的对相关几何拓扑理论的硬需求强需求，这些前沿几何拓扑理论就会逐渐的扩散到 CADCAE 工业软件研究的从业人员中，从而再扩散到其他工业应用中。

除了从数学界借鉴引入的“提出 160 个科研问题”这个学术工具，可计算离散整体几何结构实验室不仅仅用了常见的研讨会、在线课程、学术文章、申请闭门研讨会、提交重大项目建议书、举办讲习班等现有学术科研工具，而且开发了学习会、可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展、网格方桌会议、微分几何教学模式创新研讨会、提出科学问题、科学问题命名、“灵山问题”发布、可计算离散整体几何结构研究方向发布、建立跨学校多校合作的联合研究中心、提出中国科协十大工程技术难题解决方案路线图等全新的学术科研工具来推进超结构化四边形网格的研究。

学术科研组织、协调工具和方式的创新来源于科研方向、科研内容的创新。超结构化四边形网格研究值得穷尽所有学术科研工具去开展，因为这个研究最前面能够和最前沿的几何拓扑抽象数学联系起来，中间能和计算机算法、力学分析等数十个环节联系起来，最后面能和工业软件、高精尖应用仿真联系起来，从而可以全链条的推动一系列的科技发展。

超结构化四边形网格研究的关键是建立匹配的全新价值观，尤其是这个方面用到大量的前沿几何拓扑理论，容易被抽象数学成熟的价值观所误导带偏，以及后面的工业应用成熟的价值观所带偏，从而不伦不类。而以全新的价值观促进推动，才能使得超结构化四边形网格的研究成果为抽象数学和应用技术所服务。

超结构化四边形网格研究内容足够庞大和深刻，对一系列学科和技术影响广泛，需要团结各个学科的大量学者，凝聚各种学术资源，值得进行科研顶层设计、动用战略科学家。本文的 160 个科学问题仅仅是作者快速给出的概括和大纲，如果以学术文章严谨的科研标准进行深入详细研究的话，可能会细分为 1600 个问题和文章，这都是因为超结构化四边形网格的研究，灵山问题的解决需要应用到黎曼面上所有近 40 年来数个菲尔兹奖得主在内的数学家发展出来的几何拓扑理论。



（Ribbon-Graph 和调和叶状结构可视化，赵辉用 Geometric 作图。）

5.列出 160 个研究问题

(1) 面向工程师的模空间的概念综述。

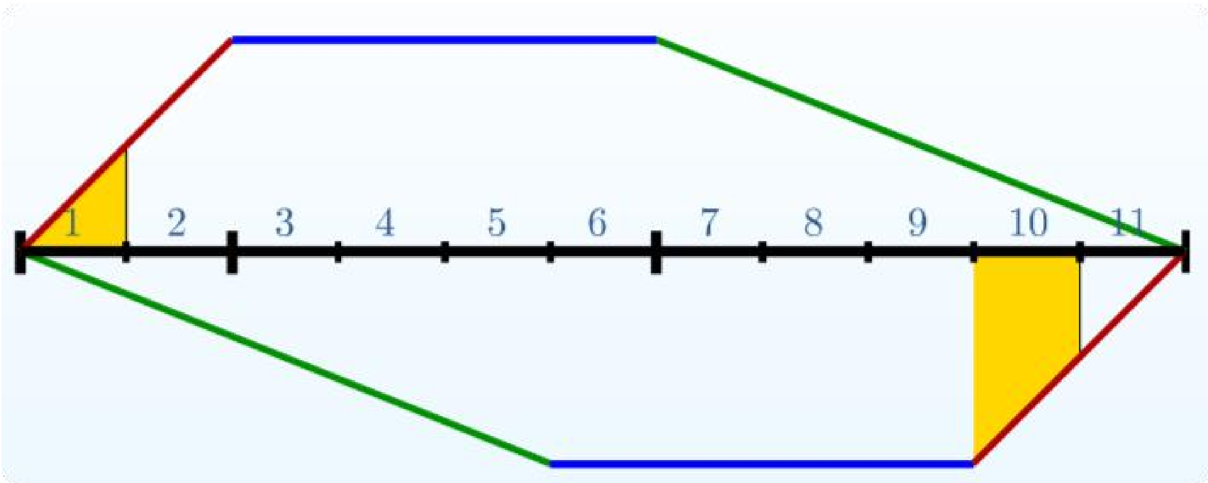
(2) 面向工程师的泰希米勒空间综述。

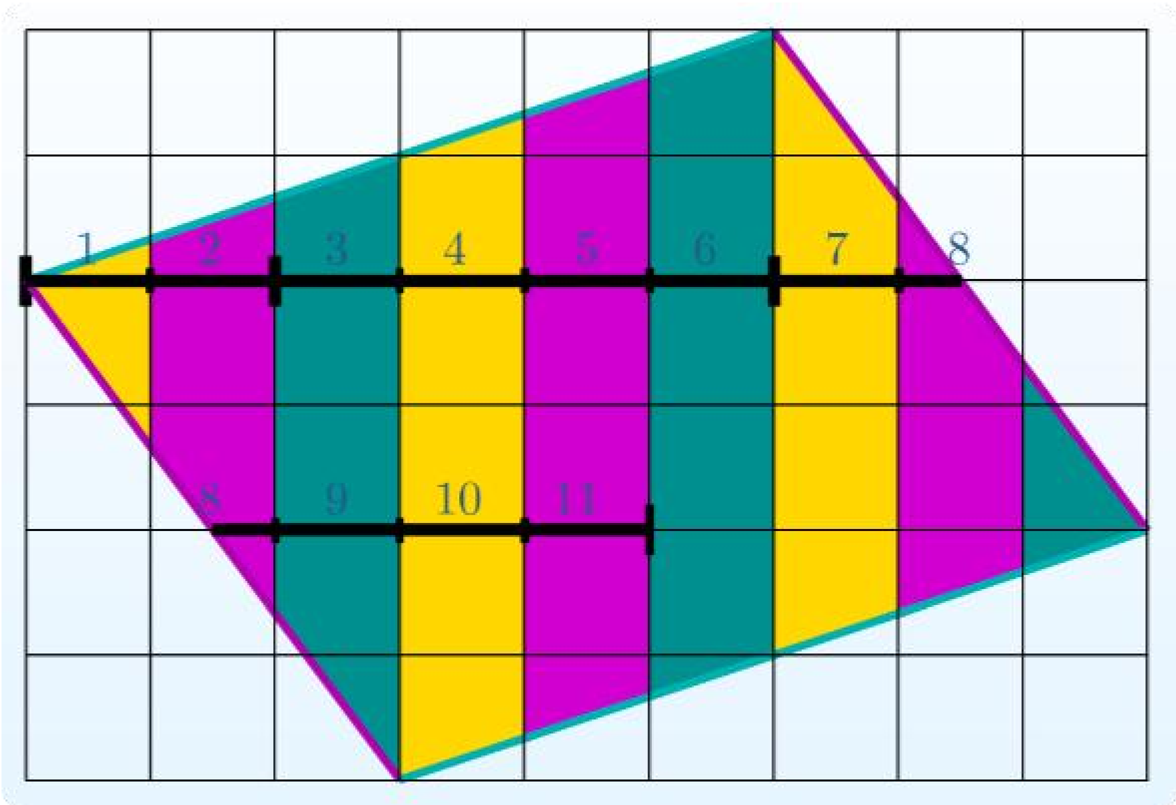
(3) 面向工程师的整体几何结构综述。

(4) 面向工程师的黎曼面综述。

(5) 面向工程师的黎曼度量综述。

(6) 面向工程师的 Arnold’s problem 综述。





（Arnold’s problem，摘自 Anton Zorich 的 note。）

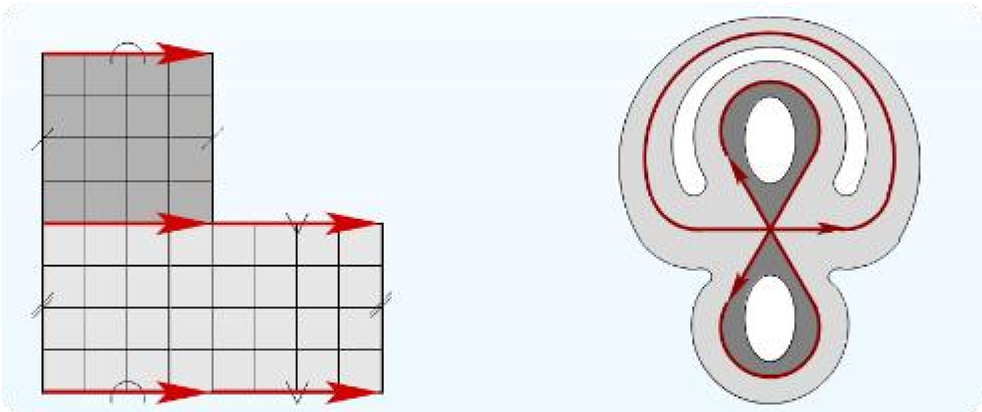
(7) 面向工程师的 Square-tiled surfaces 综述。

(8) 面向工程师的 Interval exchanges 综述。

(9) 面向工程师的 Suspension flow on the flat torus 综述。

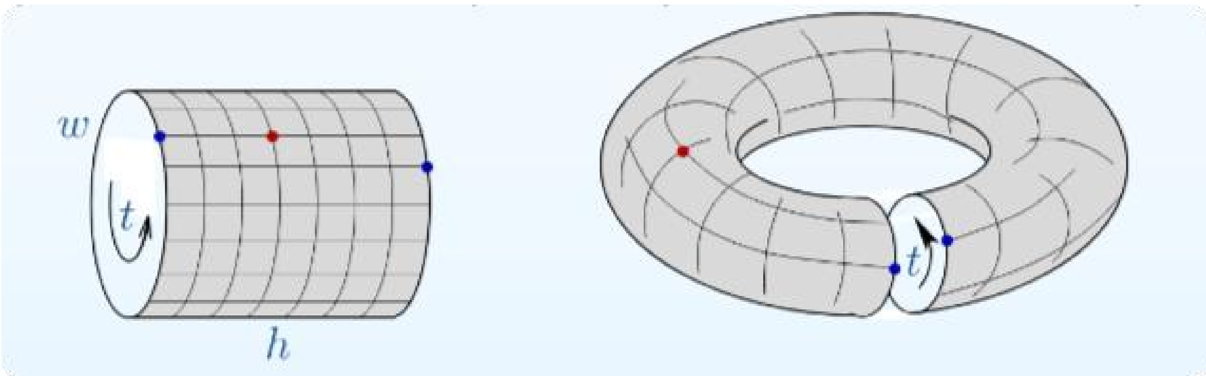
(10) 面向工程师的叶状结构综述。

(11) 面向工程师的 Critical graphs (separatrix diagrams)综述。



(Critical graphs，摘自 Anton Zorich 的 note。)

(12) 面向工程师的 Count of square-tiled tori with two marked points 计数综述。



(Count of square-tiled tori，摘自 Anton Zorich 的 note。)

(13) 面向工程师的 Flat Surface 综述。

(14) 面向工程师的 interval exchange permutation 综述。

(15) 面向工程师的 bands of cycles 综述。

(16) 面向工程师的 Canonical suspension over an interval exchange 综述。

(17) 面向工程师的 holomorphic 1-forms 综述。

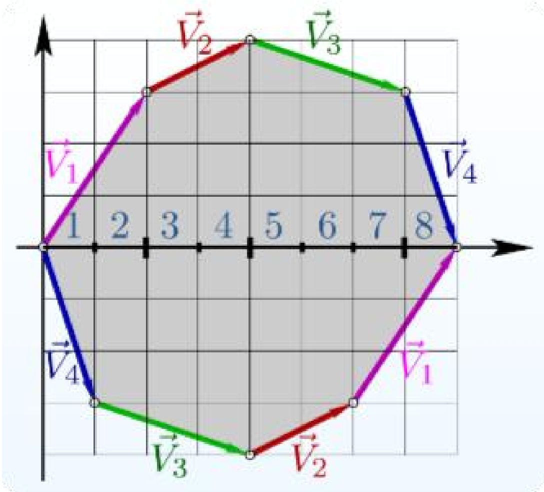
(18) 面向工程师的 Stratification of the moduli spaceof holomorphic 1-forms 综述。

(19) 面向工程师的 Connected components of strata 综述。

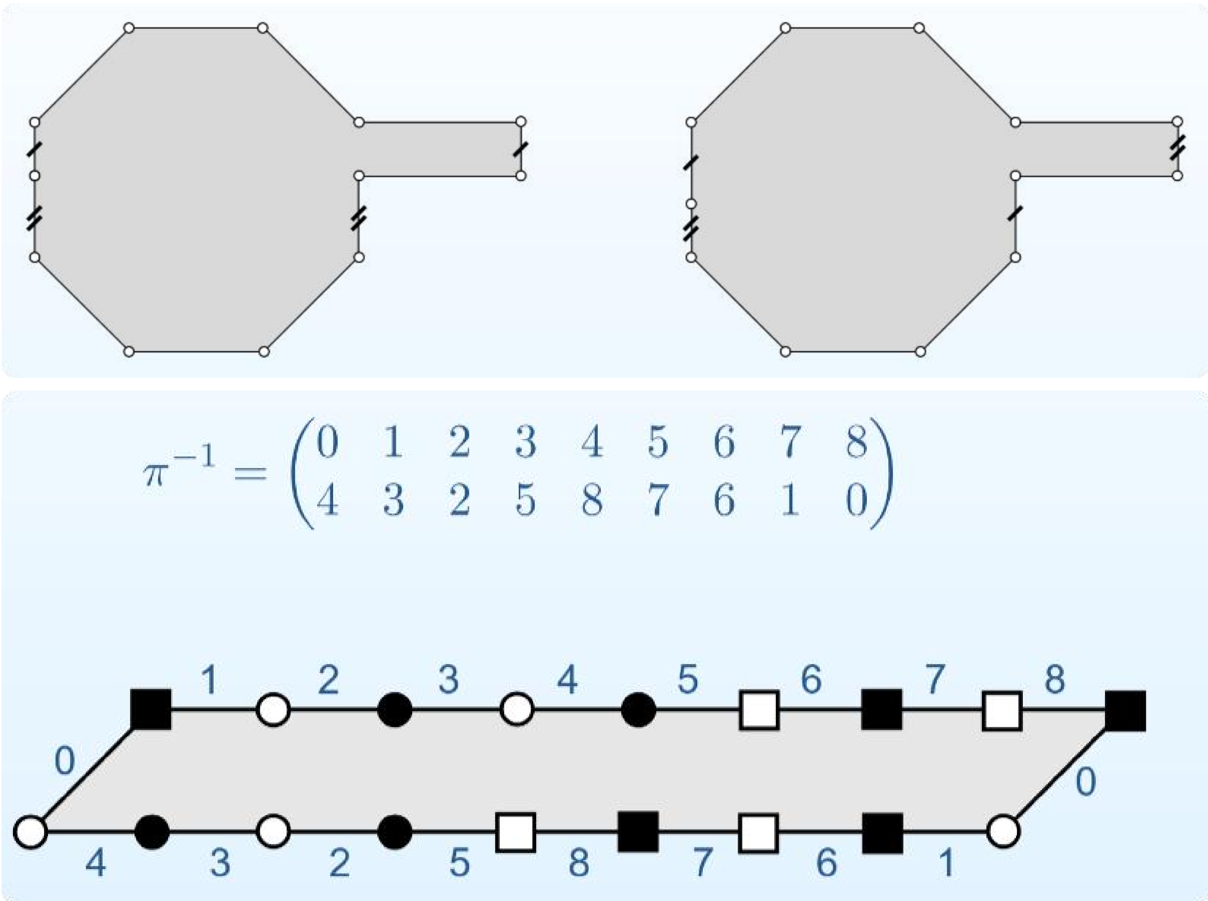
(20) 面向工程师的 Index of a smooth closed path on a flat surface 综述。

(21) 面向工程师的 Parity of the spin structure 综述。

(22) 面向工程师的 Strata Classification Theorem 综述。



（摘自 Anton Zorich 的 note。）



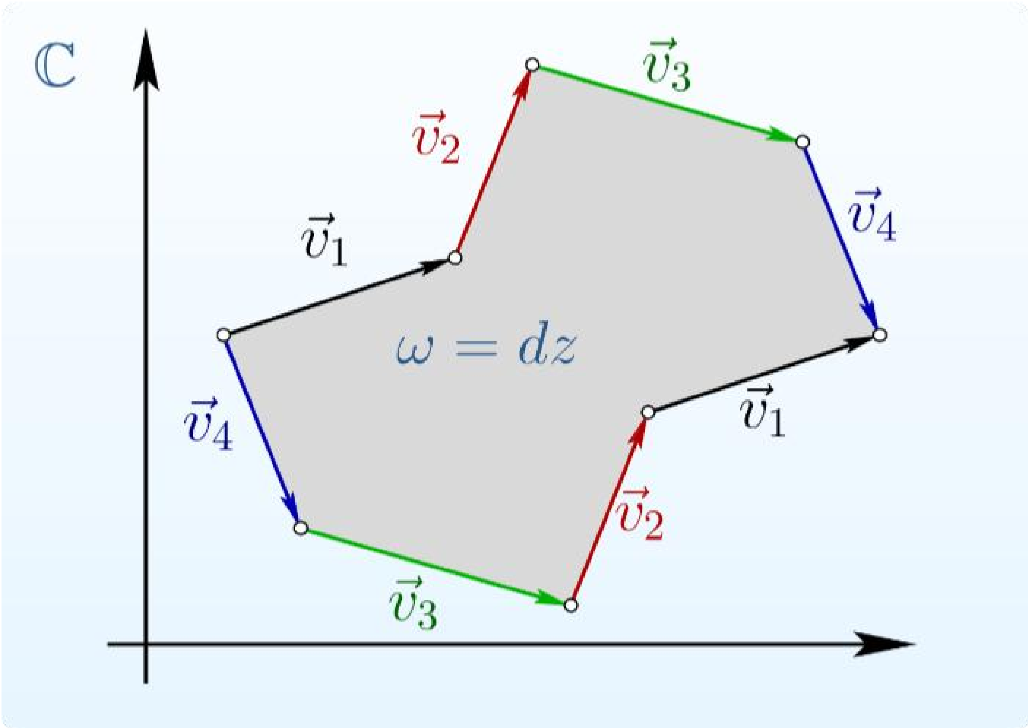
（摘自 Anton Zorich 的 note。）

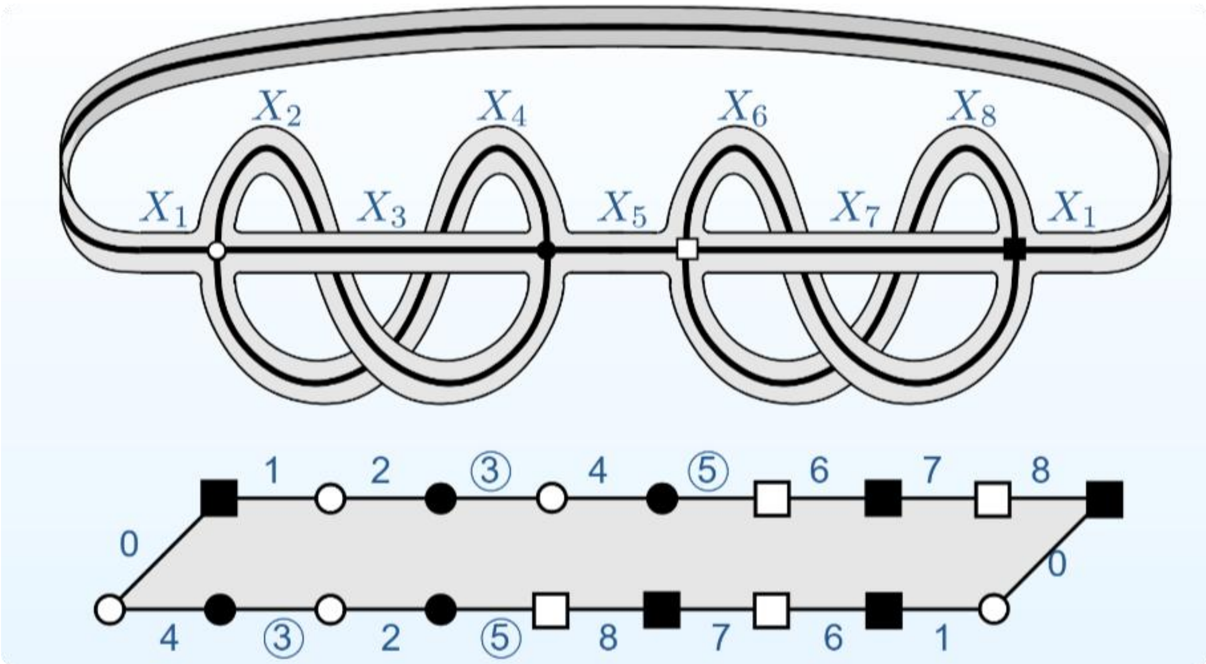
(23) 面向工程师的 Flat surface 和 Holomophic 1-form 关系综述。

(24) 面向工程师的 Strebel differentials 综述。

(25) 面向工程师的 ribbon graph 综述。

(26) 面向工程师的 interval exchangetransformation 和 strata 关系综述。





(Ribbon graph，摘自 Anton Zorich 的 note。)

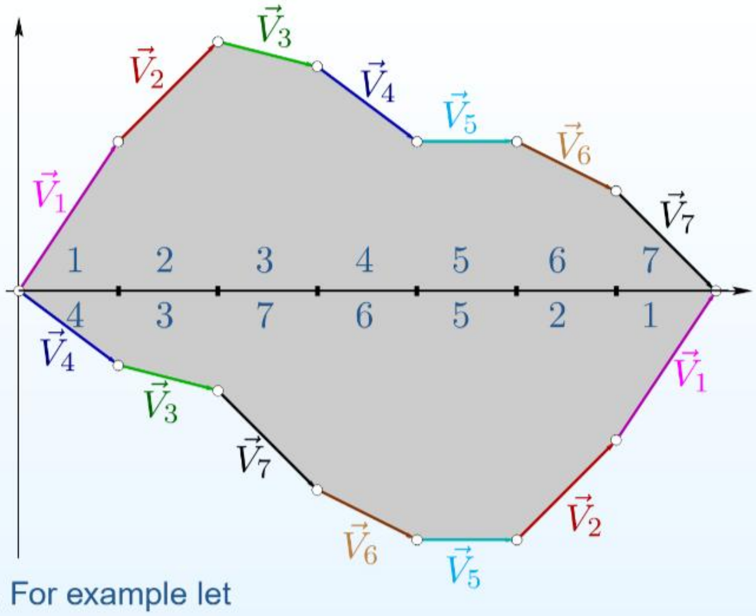
(27) 面向工程师的 Diffeomorphisms of surfaces 综述。

(28) 面向工程师的 closed orbit of the horocyclic flow 综述。

(29) 面向工程师的 Diffeomorphisms of surfaces 分类综述。

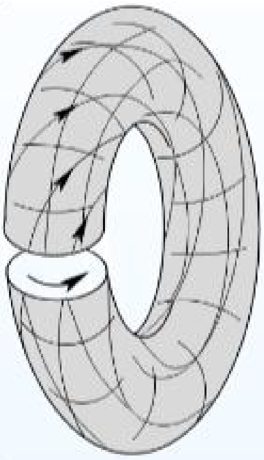
(30) 面向工程师的 Pseudo-Anosov diffeomorphisms 综述。

Canonical suspension



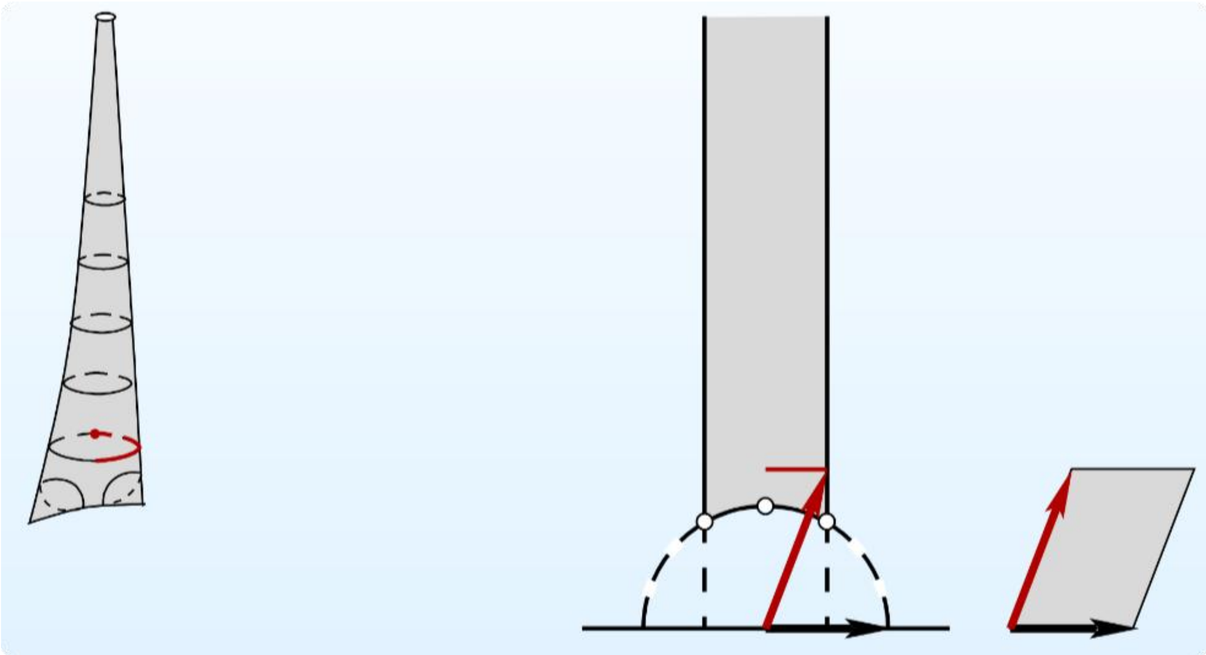
Consider some permutation. For example let

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 7 & 6 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

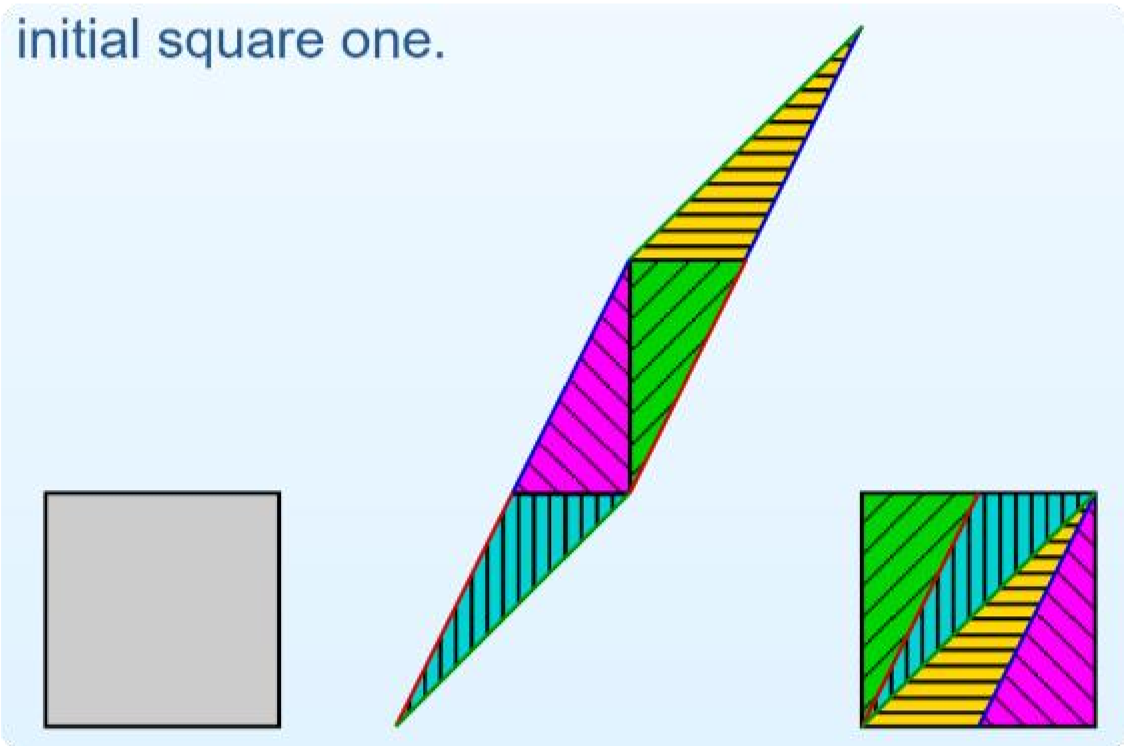


$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\hat{f}_h"] \arrow[d] & \mathbb{R}^2 \arrow[d] \\
\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2 \arrow[r, "f_h"'] & \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2
\end{tikzcd}$$

(Diffeomorphisms of surfaces，摘自 Anton Zorich 的 note。)

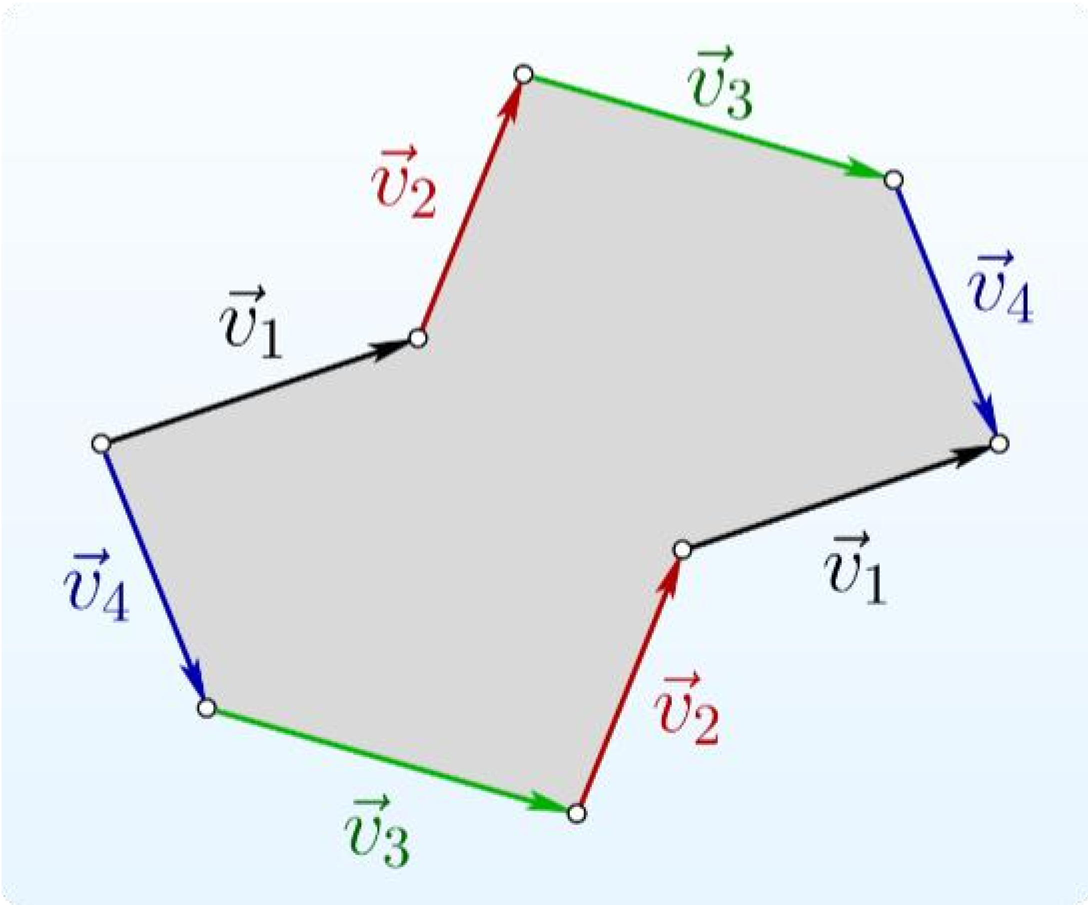


（Horocyclic flow，摘自 Anton Zorich 的 note。）



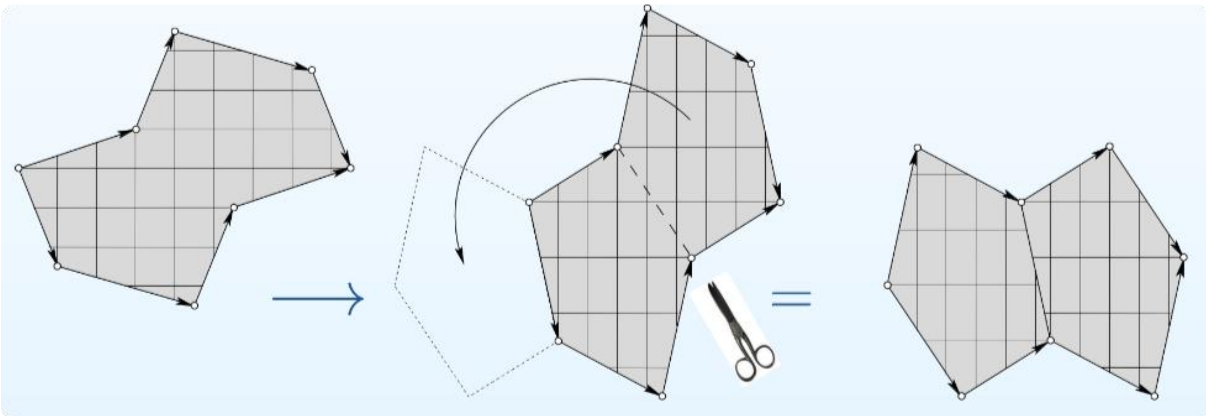
（Pseudo-Anosov diffeomorphisms，摘自 Anton Zorich 的 note。）

(31）面向工程师的 Very flat surfaces 综述。



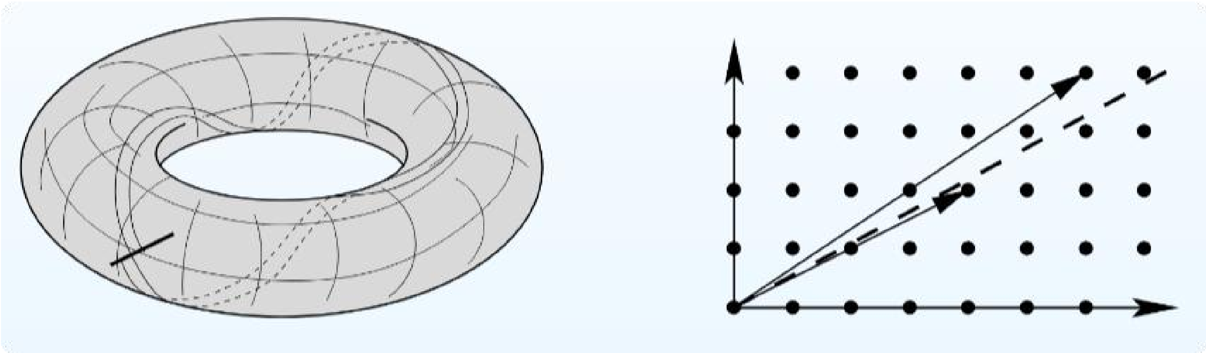
（Construction from a polygon，摘自 Anton Zorich 的 note。）

(32) 面向工程师的 Masur—Veech Theorem 理论综述。



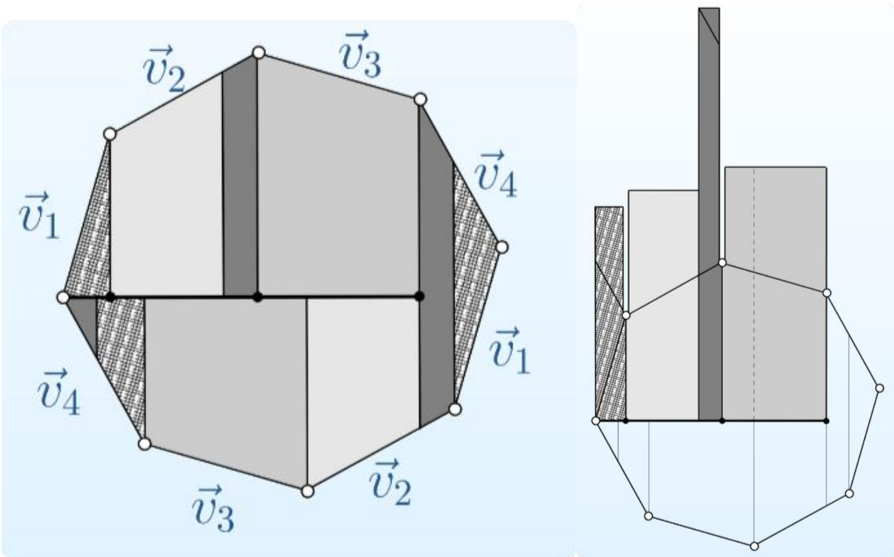
（Cut and Paste，摘自 Anton Zorich 的 note。）

(33) 面向工程师的 Renormalization 综述。



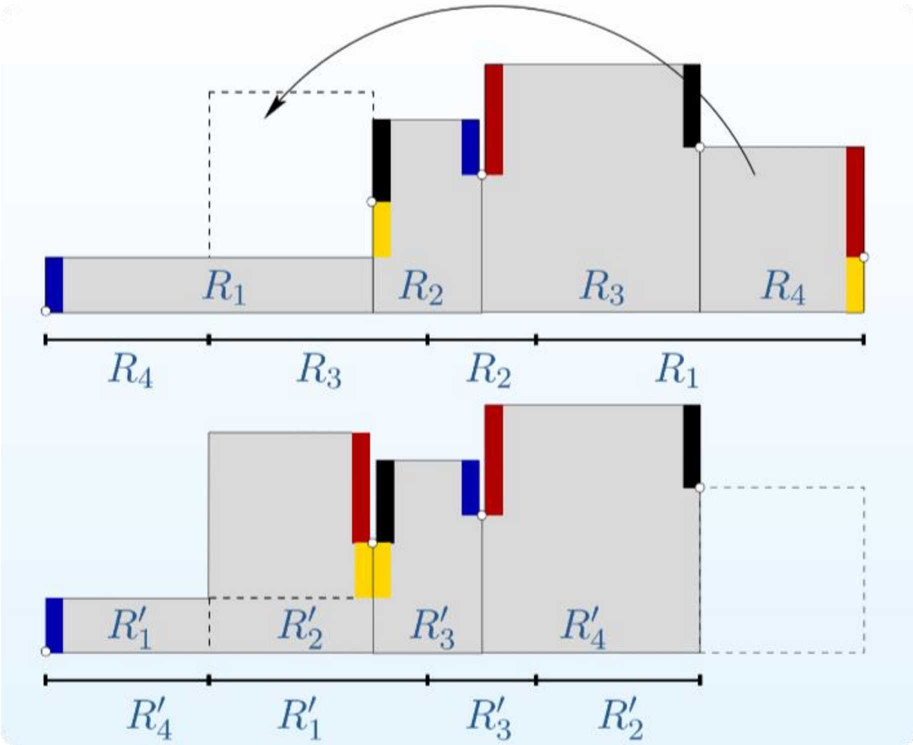
(Asymptotic cycle for a torus，摘自 Anton Zorich 的 note。)

(34) 面向工程师 Zippered Rectangles 综述。



(Zippered Rectangles，摘自 Anton Zorich 的 note。)

(35) 面向工程师的 Rauzy – Veech induction 综述。



(Rauzy Move，摘自 Anton Zorich 的 note。)

(36) 面向工程师的 Gauss — Manin connection 综述。

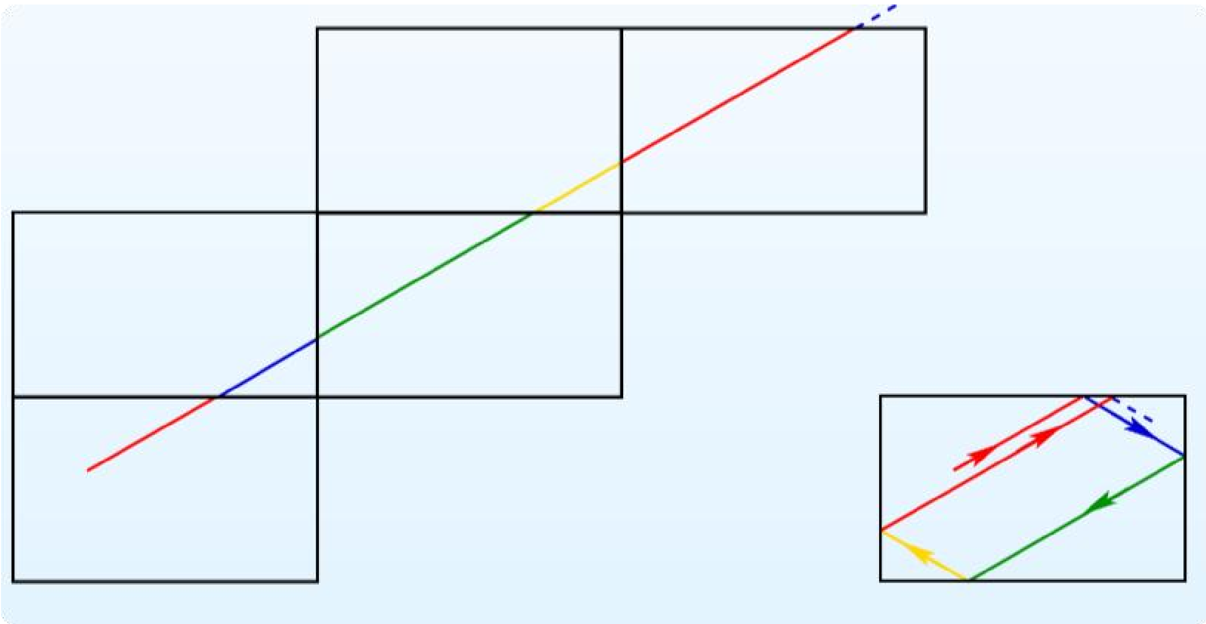
(37) 面向工程师的 counting functions of cylinders 综述。

(38) 面向工程师的 billiards 综述。

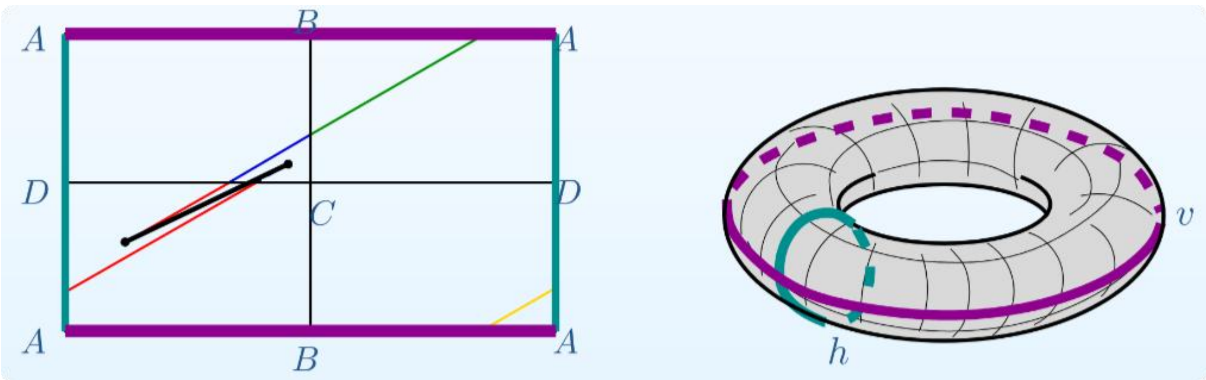
(billiards，摘自 Anton Zorich 的 note。)

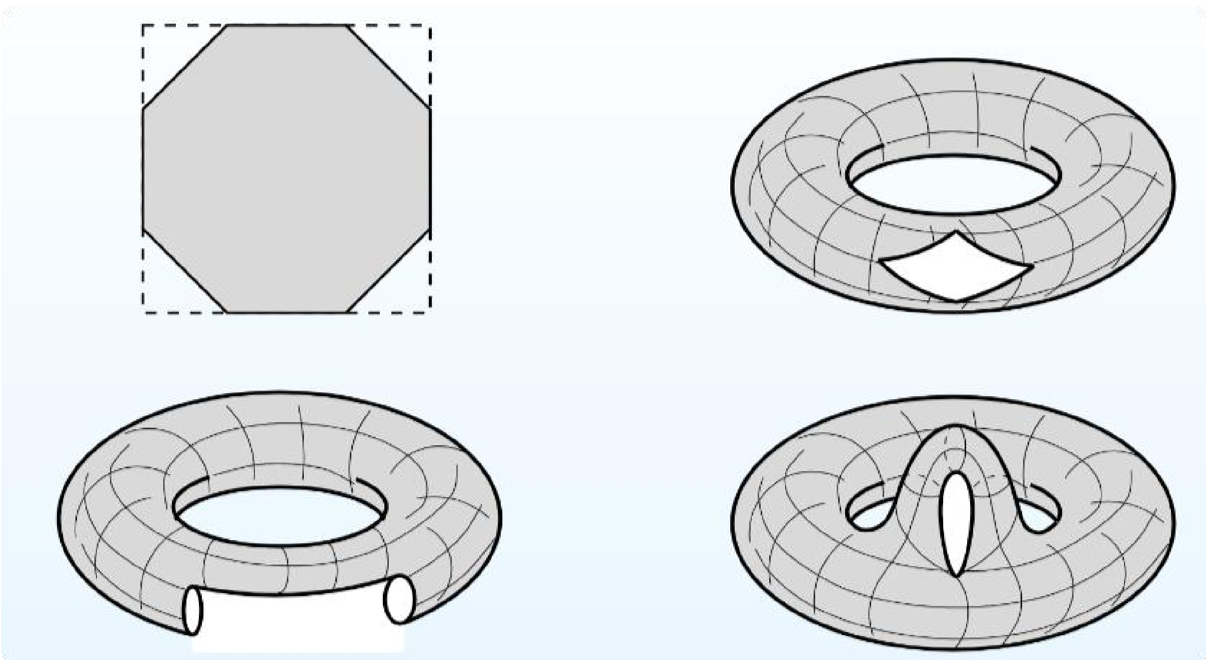
(39) 面向工程师的 strata of quadratic differentials 综述。

(40) 面向工程师的 From billiards to surface foliations 综述。



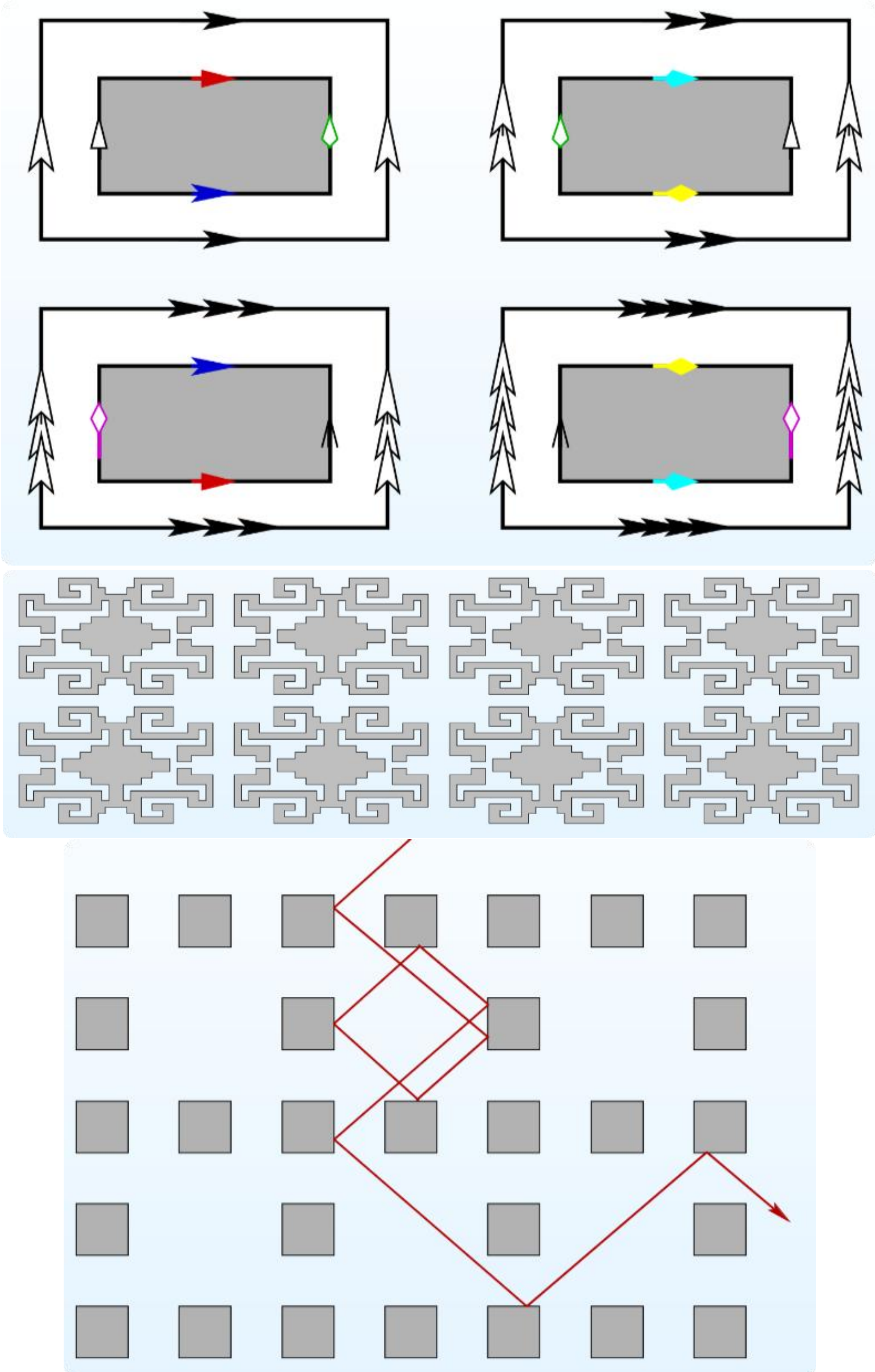
(billiards to surface foliations，摘自 Anton Zorich 的 note。)





(摘自 Anton Zorich 的 note。)

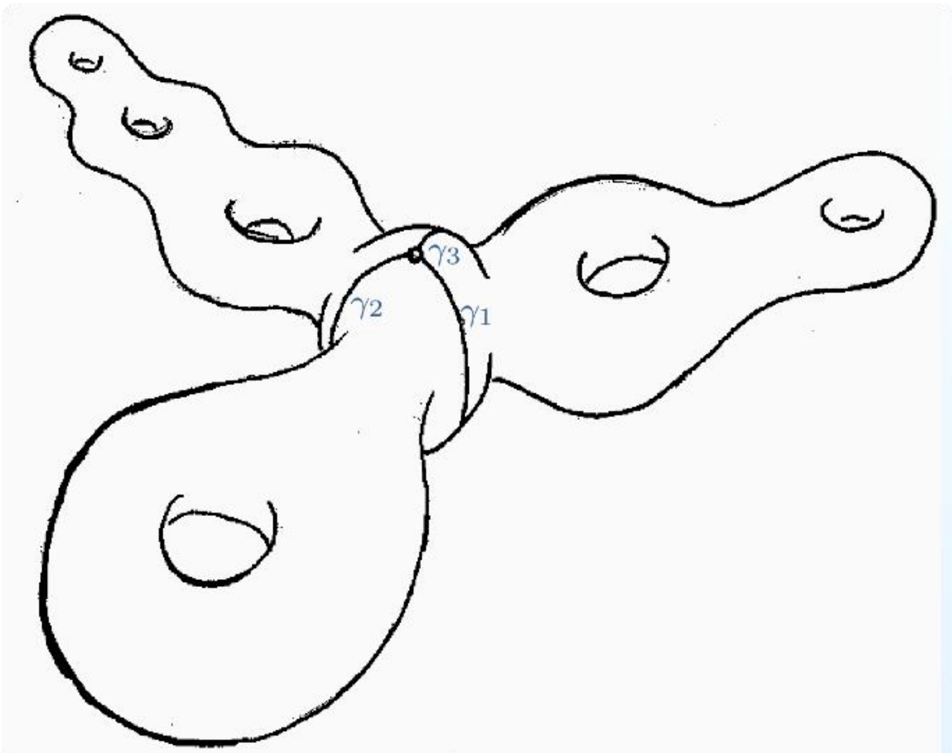
(41) 面向工程师的 Wind tree Surface 综述。

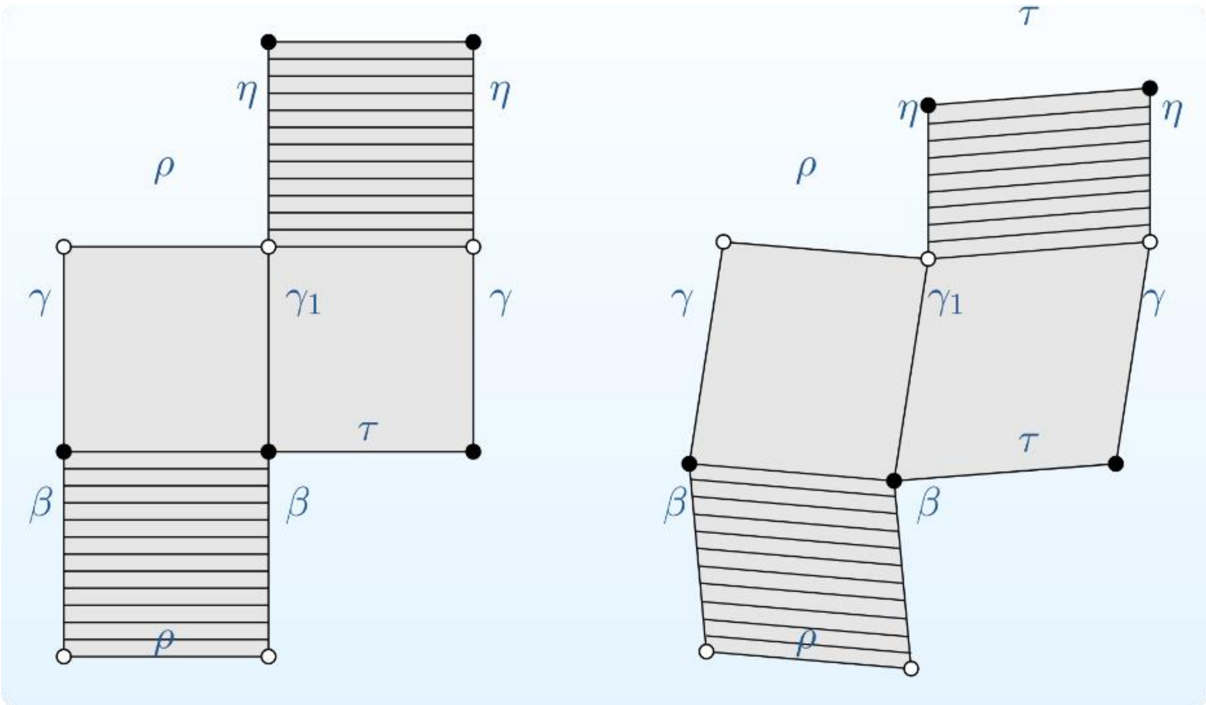


（摘自 Anton Zorich 的 note。）

(42) 面向工程师的 Magic Wand Theorem 综述。

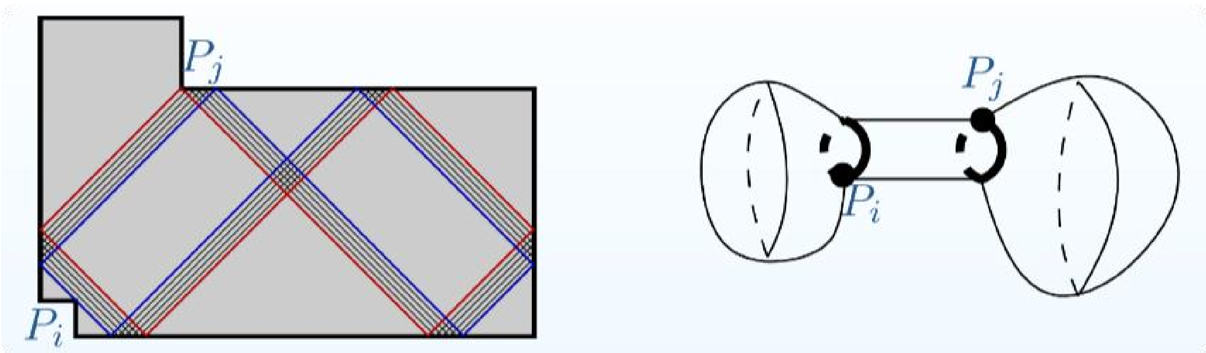
(43) 面向工程师的 Count of closed geodesics and of saddle connections on translation surfaces 综述。

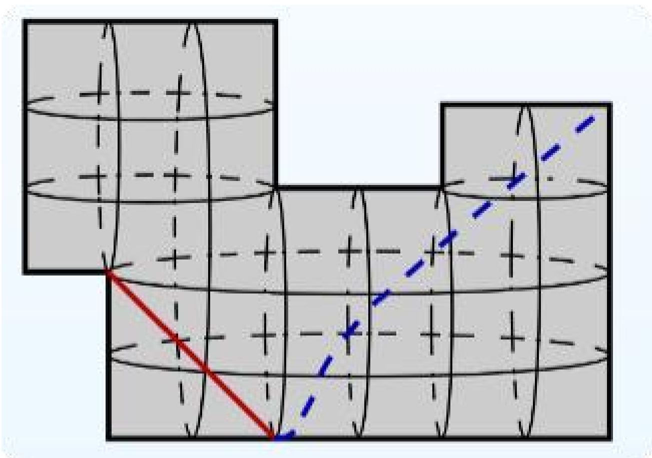




（saddle connections，摘自 Anton Zorich 的 note。）

(44) 面向工程师的 Closed trajectories and generalized diagonals 综述。





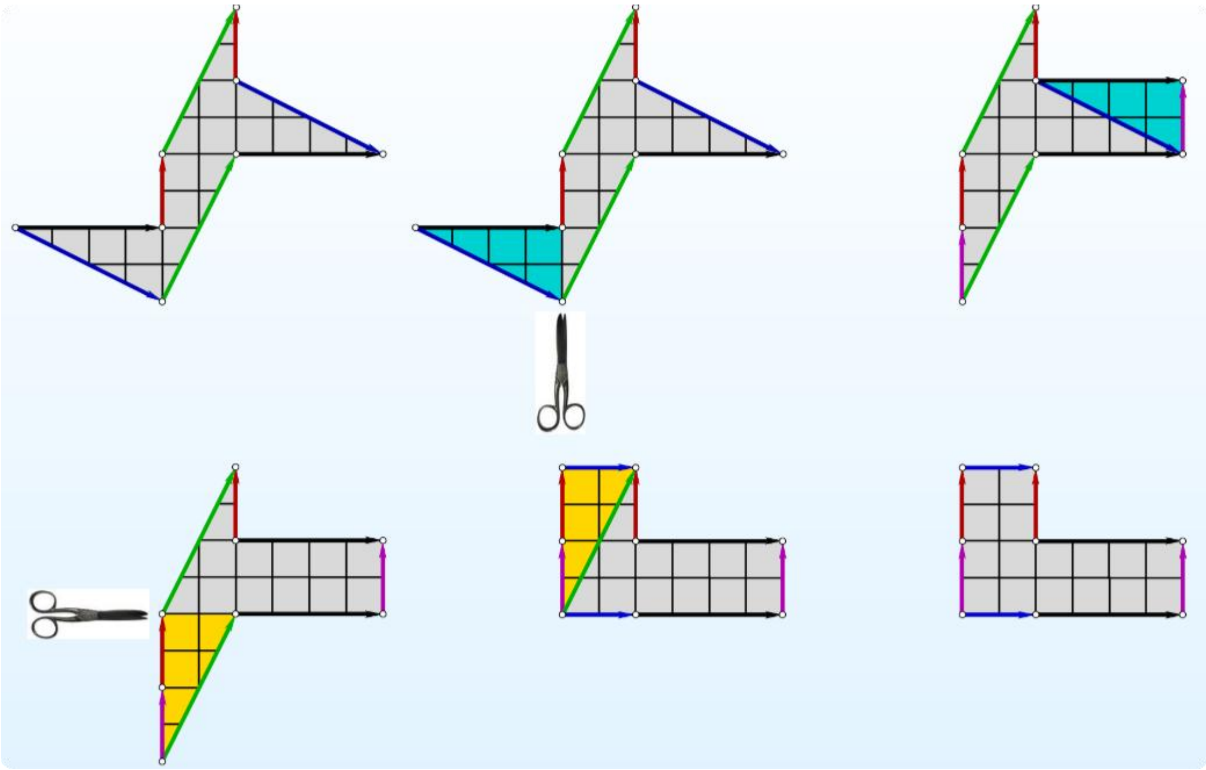
（摘自 Anton Zorich 的 note。）

(45) 面向工程师的 Integer points in the moduli space of Abelian differentials 综述。

(46) 面向工程师的 Canonical double cover defined by a quadratic differential 综述。

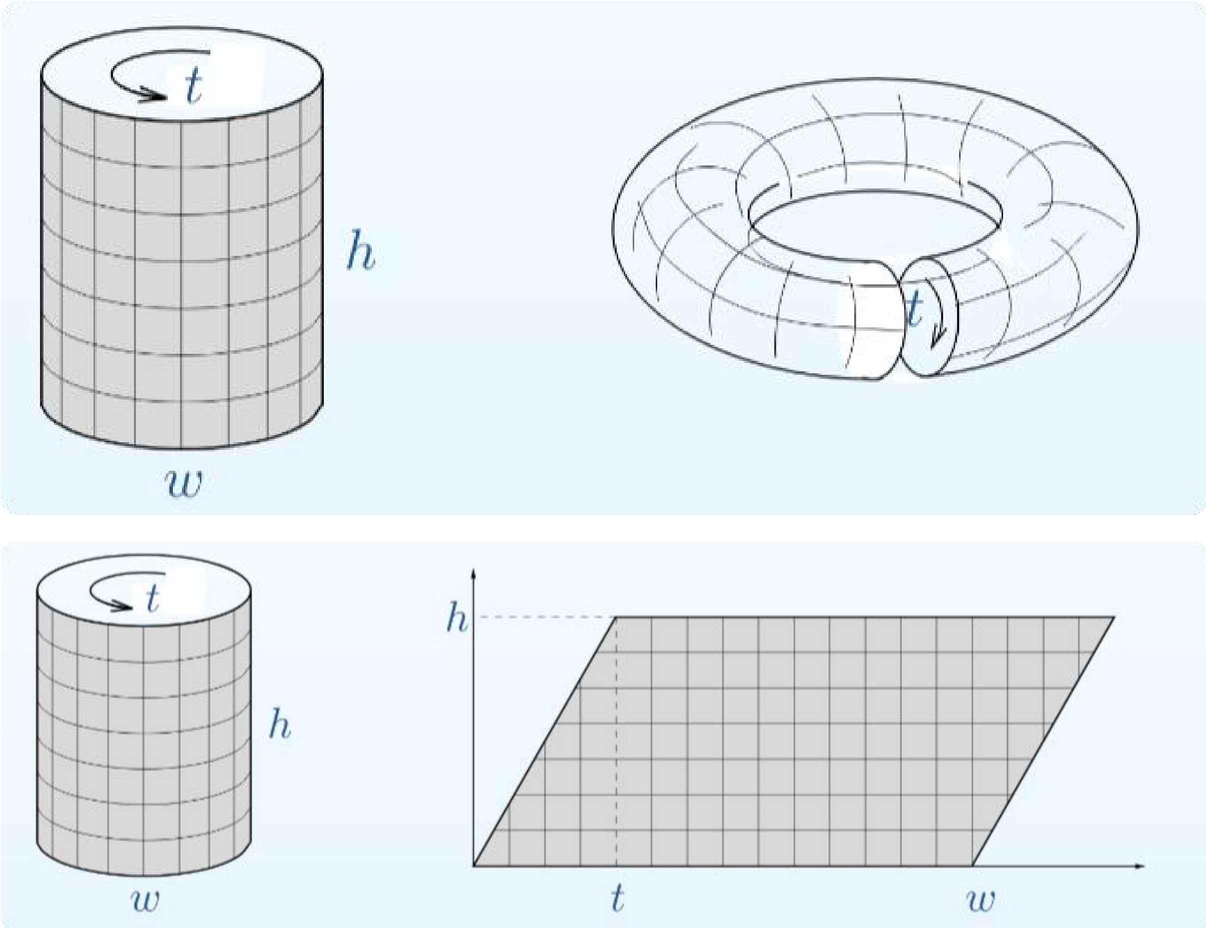
(47) 面向工程师的 Counting volume by counting integer points 综述。

(48) 面向工程师的 Integer points as square-tiled surfaces 综述。



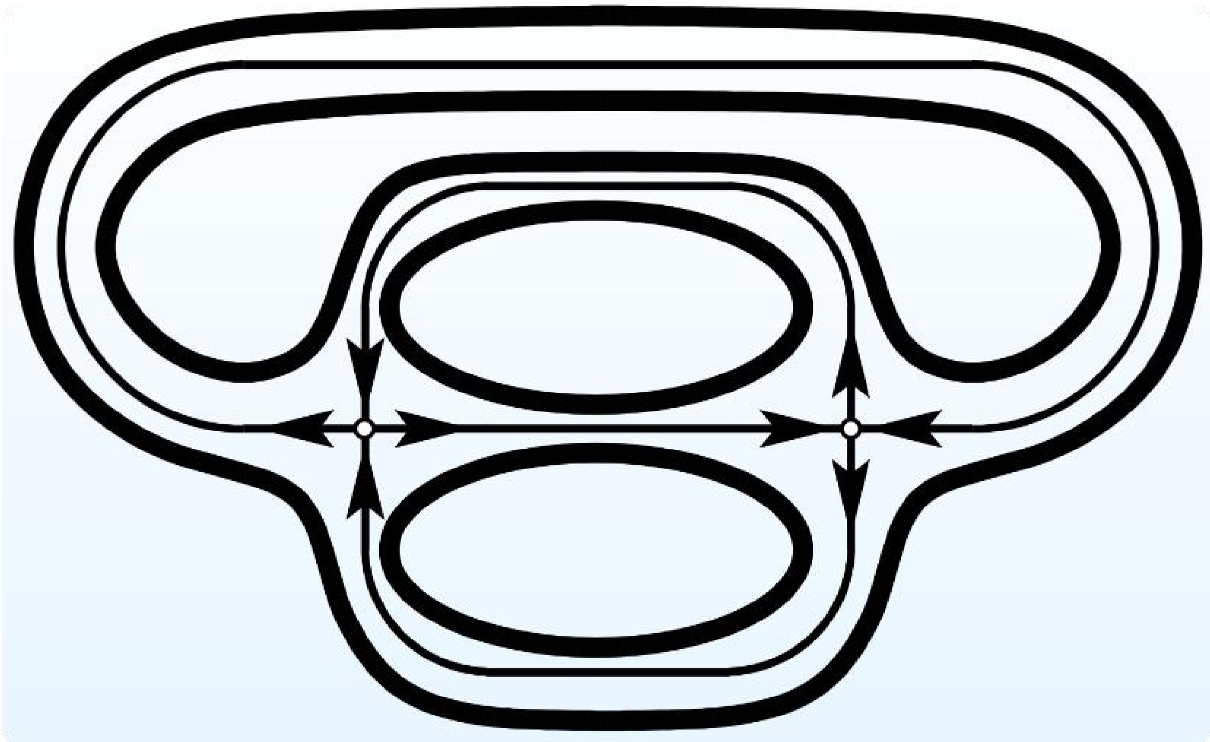
(Integer points as square-tiled surfaces，摘自 Anton Zorich 的 note。)

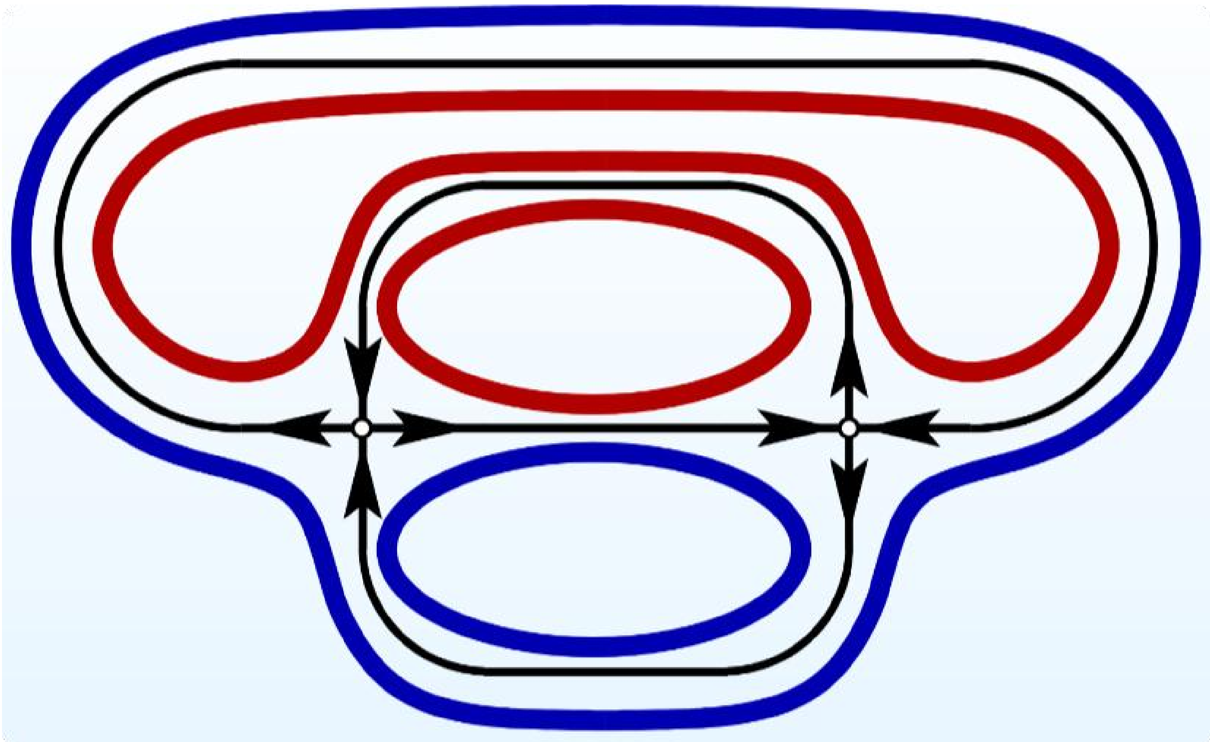
(49) 面向工程师的 Count of square-tiled surfacesthrough separatrix diagrams 综述。

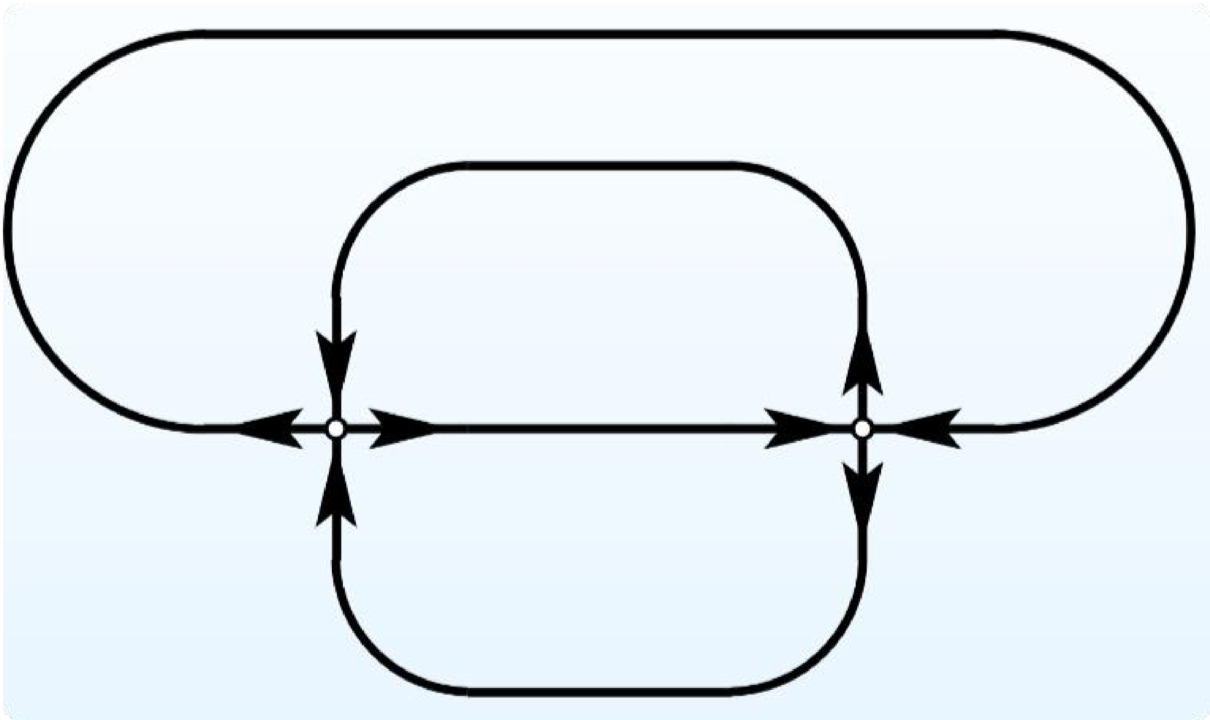


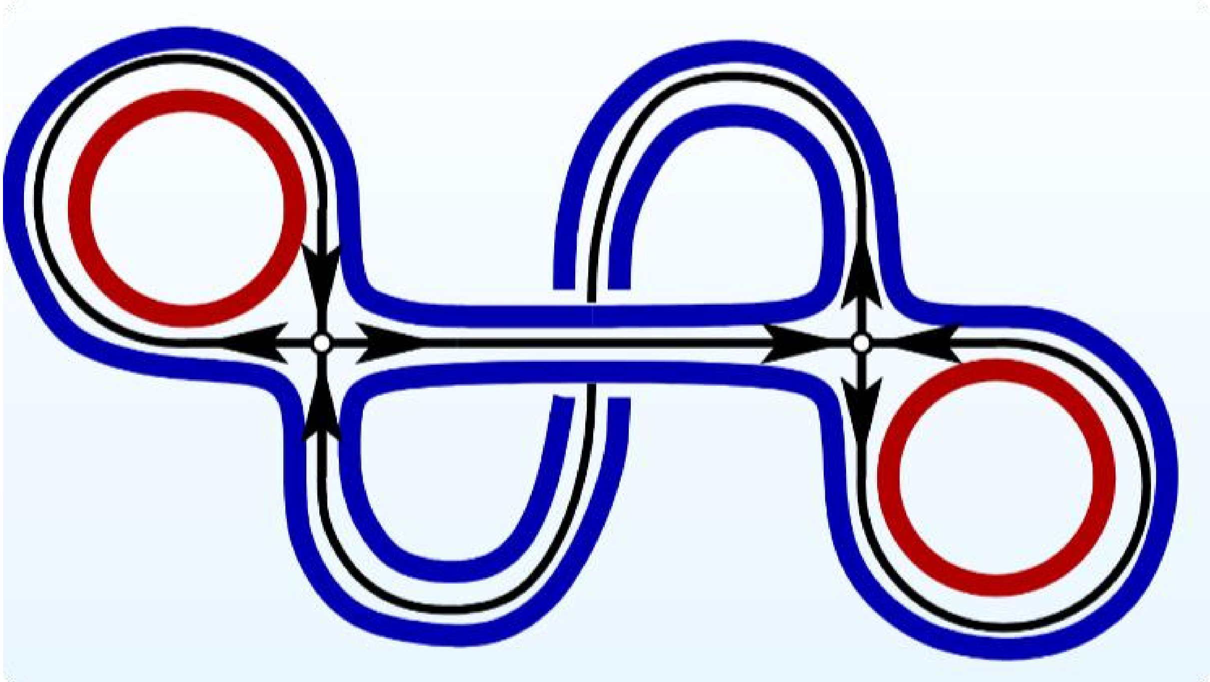
（Integer points as square-tiled surfaces，摘自 Anton Zorich 的 note。）

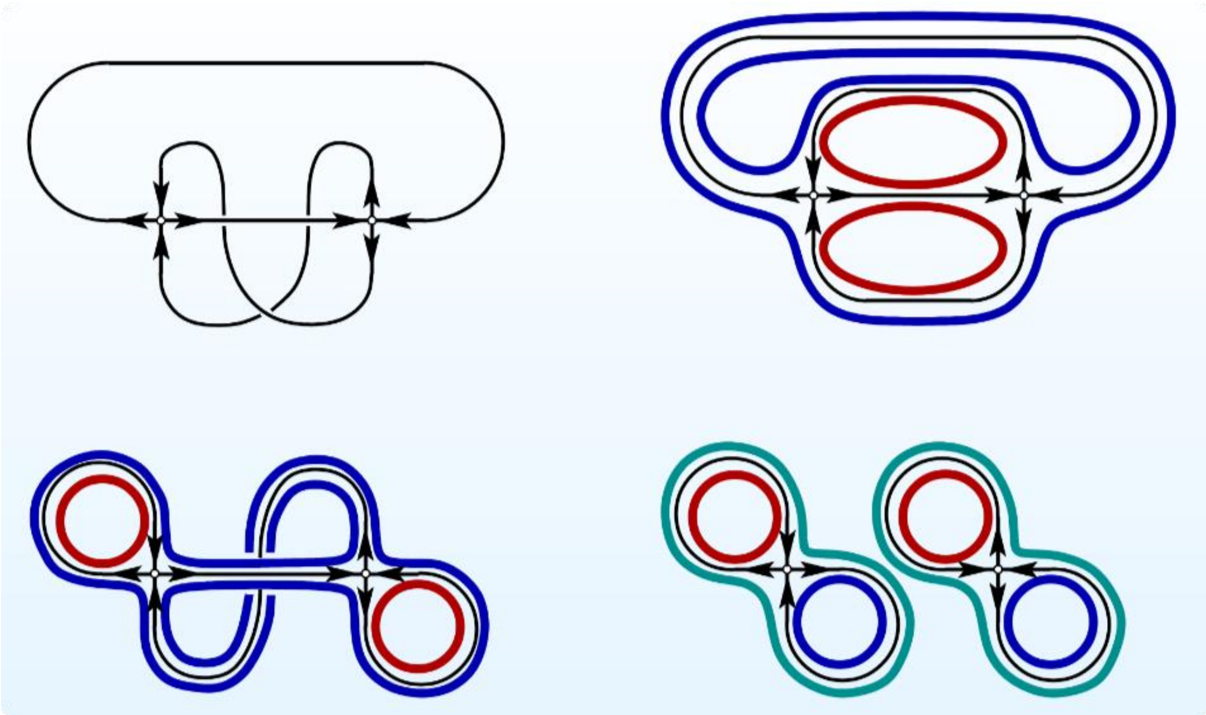
(50) 面向工程师的 Admissible diagrams 综述。





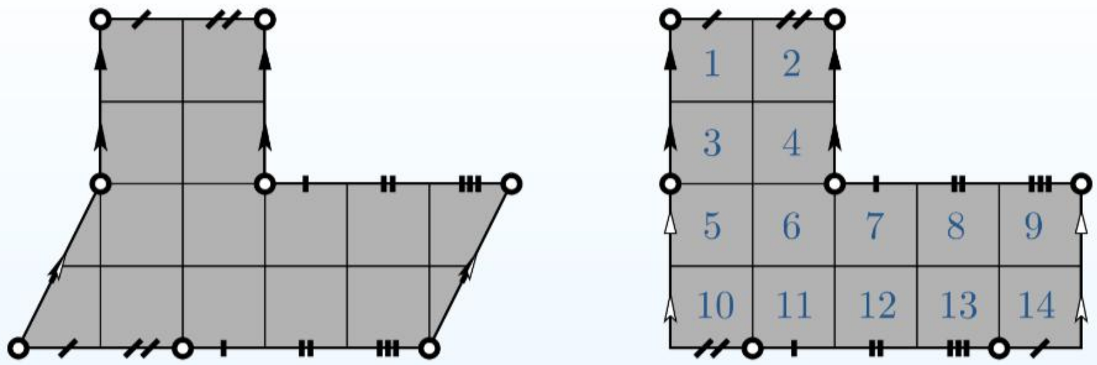






（摘自 Anton Zorich 的 note。）

(51）面向工程师的 Encoding square-tiled surfaces by pairs of permutations 综述。



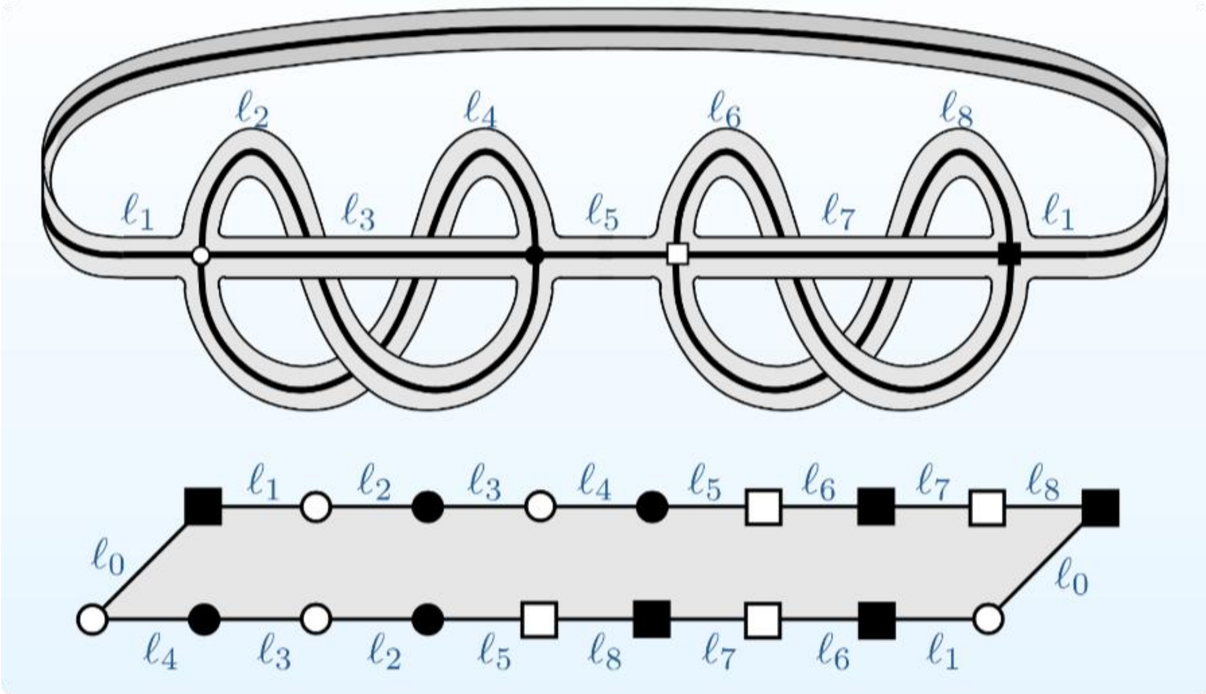
$$\pi_h = (1,2)\,(3,4)\,(5,6,7,8,9)\,(10,11,12,13,14)$$

$$\pi_v = (1,14,9,13,8,12,7,11,6,4,2,10,5,3)$$

$$\pi_h\pi_v\pi_h^{-1}\pi_v^{-1} = \mathbf{(2,9,6)}\,(1)\,(3)\,(4)\,(5)\,(7)\,(8)\,(10)\,(11)\,(12)\,(13)\,(14)$$

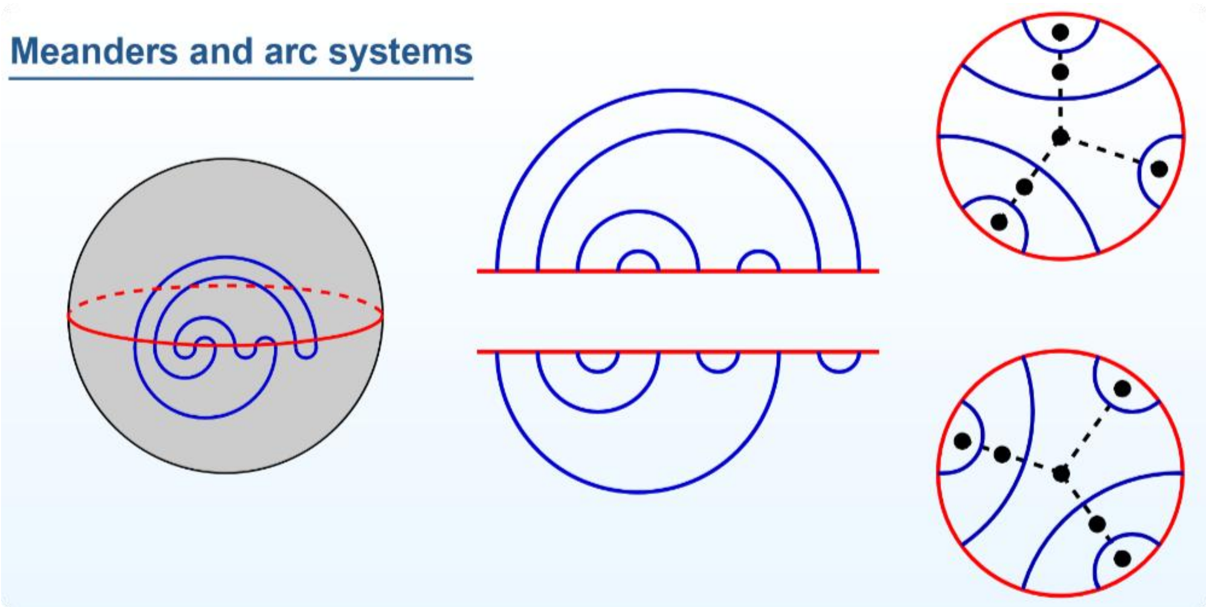
（摘自 Anton Zorich 的 note。）

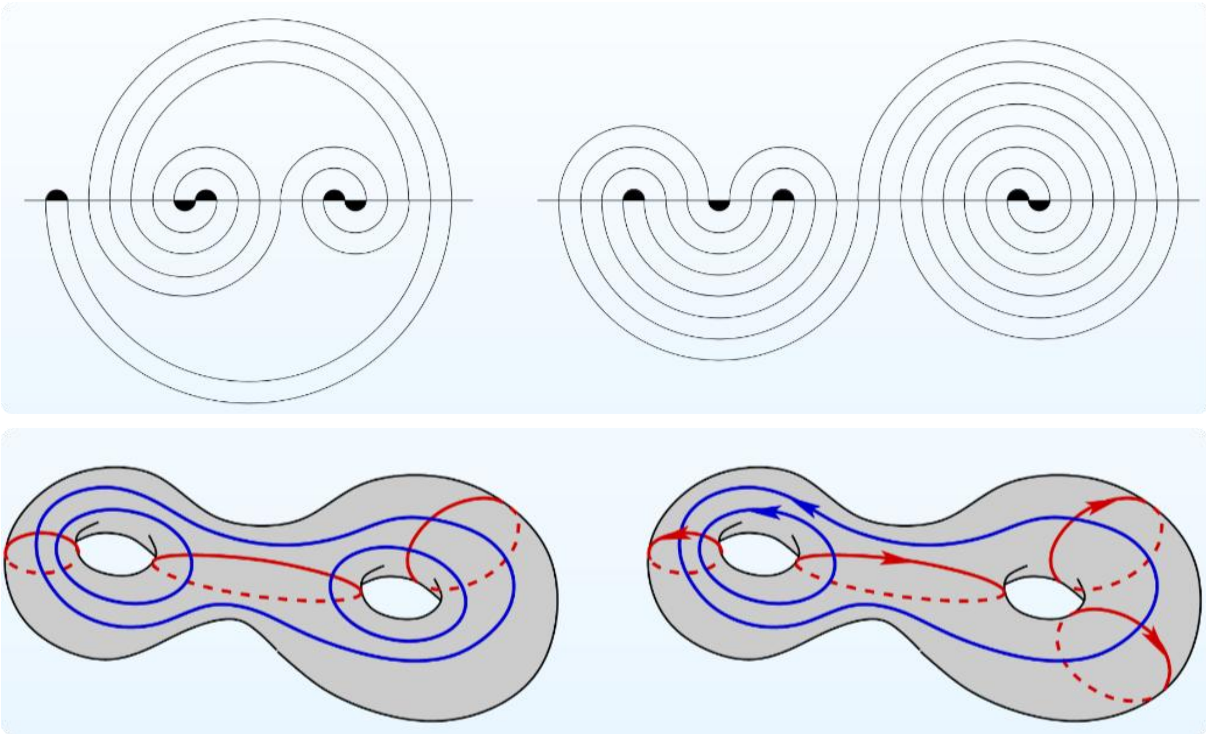
(52）面向工程师的 1-cylinder surface as a pair of permutations 综述。



（摘自 Anton Zorich 的 note。）

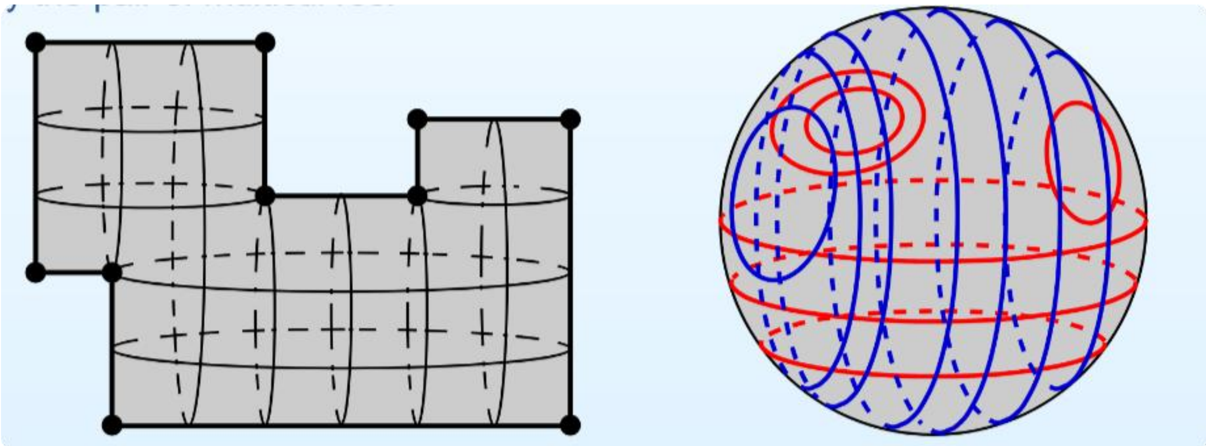
(53) 面向工程师的 Meanders and arc systems 综述。





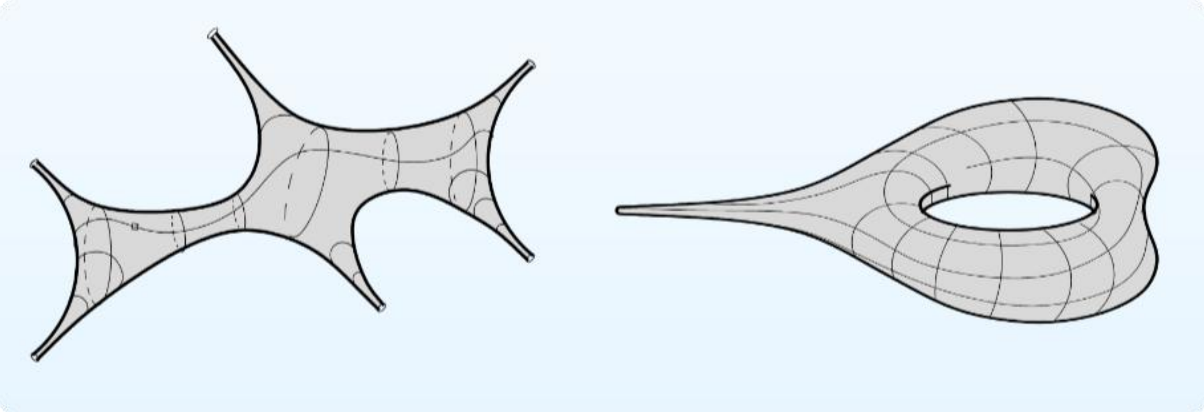
（摘自 Anton Zorich 的 note。）

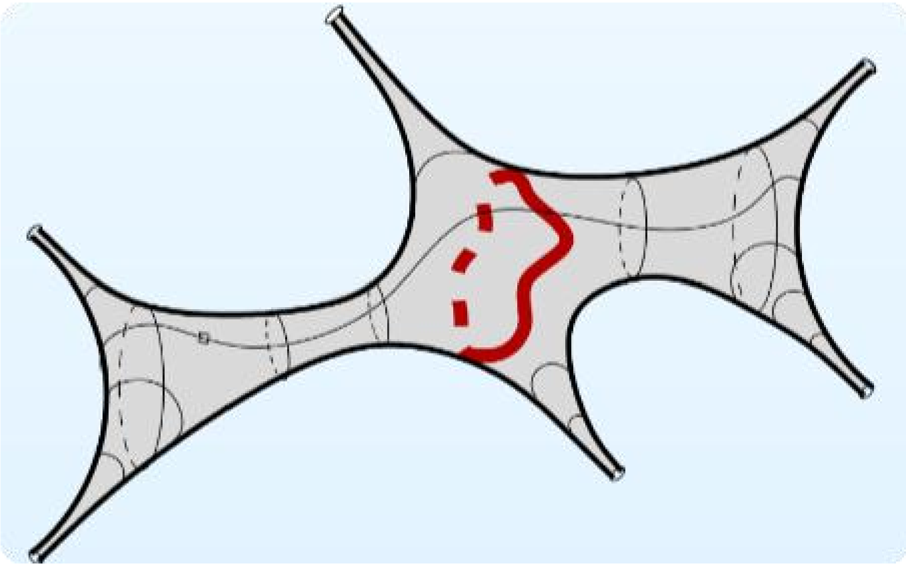
(54) 面向工程师的 Pairs of transverse multicurves as square-tiled surfaces 综述。



（square-tiled surfaces，摘自 Anton Zorich 的 note。）

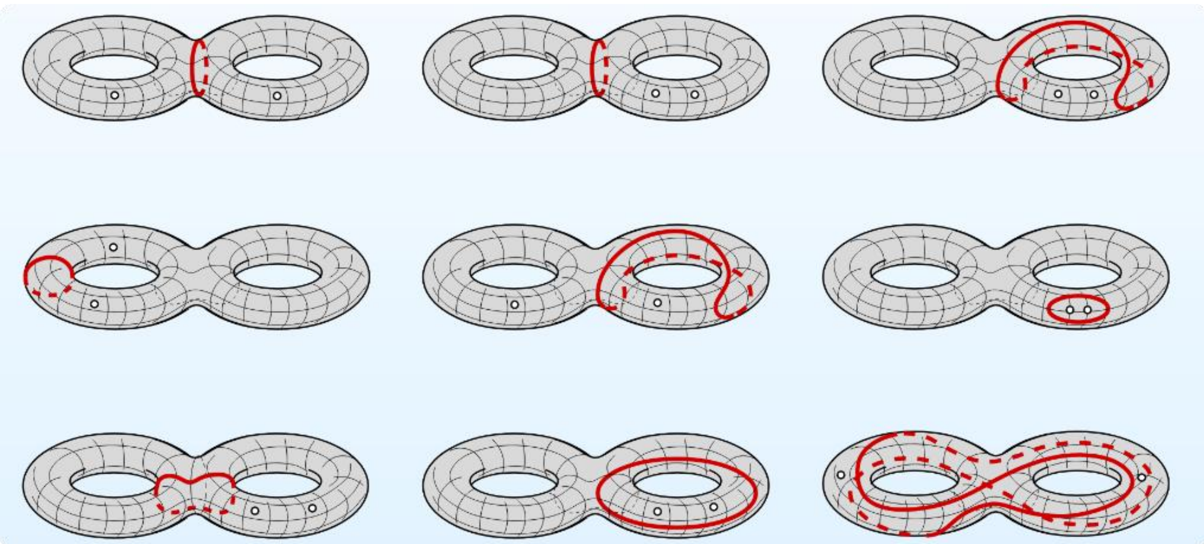
(55) 面向工程师的 Hyperbolic surfaces 综述。





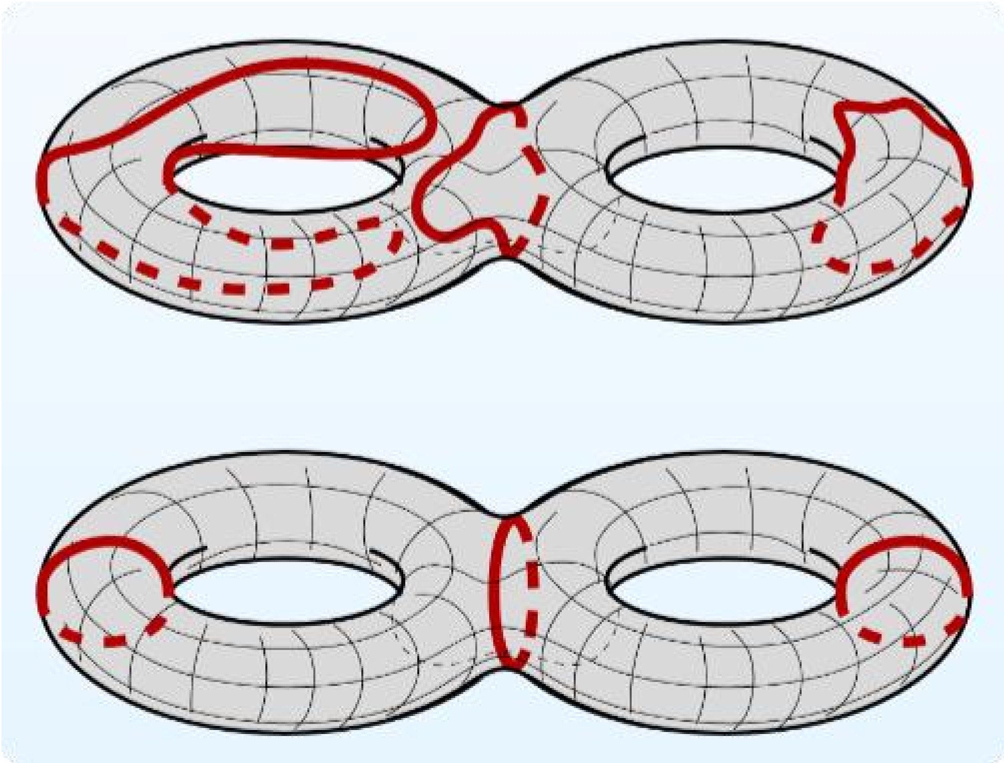
（Hyperbolic surfaces，摘自 Anton Zorich 的 note。）

（56）面向工程师的 orbits of the mapping class group 综述。

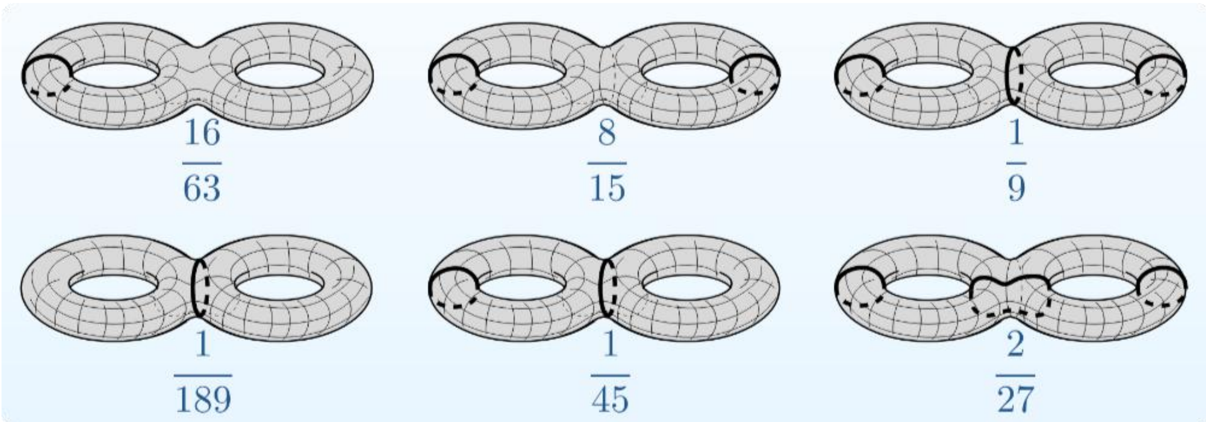


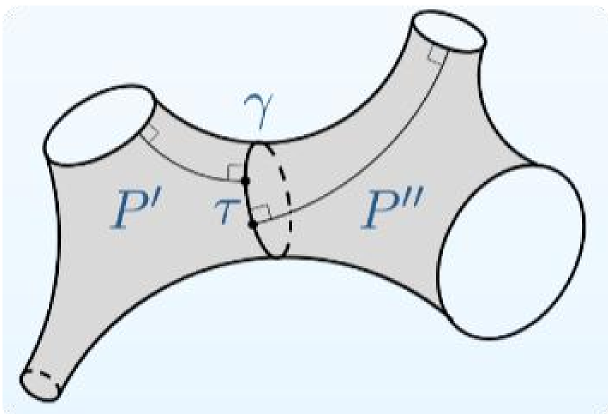
（orbits of mapping class group，摘自 Anton Zorich 的 note。）

（57）面向工程师的 Mirzakhani’s count of hyperbolicgeodesic multicurves 综述。

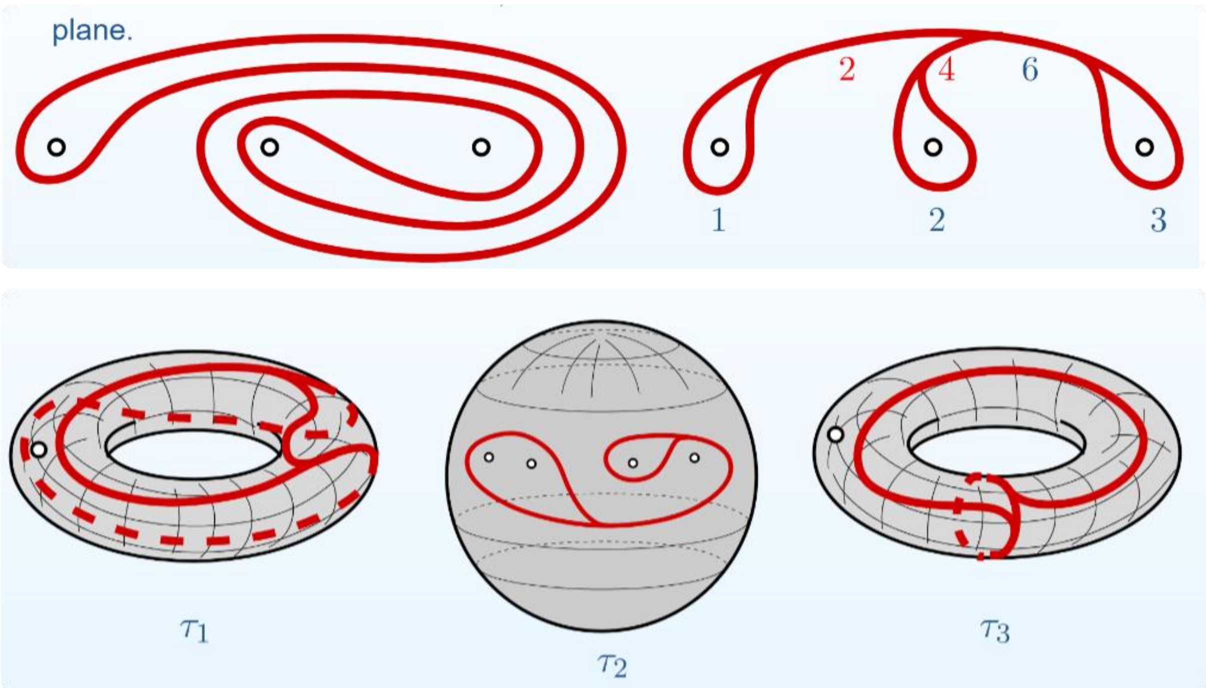


（Geodesic representatives of multicurves，摘自 Anton Zorich 的 note。）



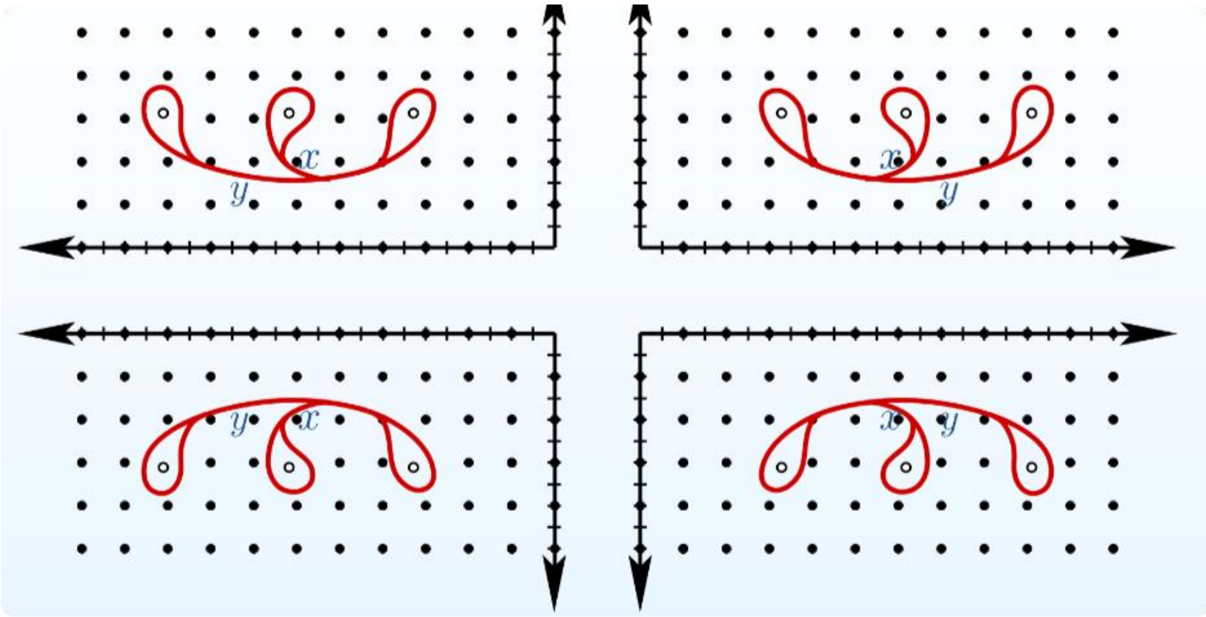


(58) 面向工程师的 Train tracks 综述。



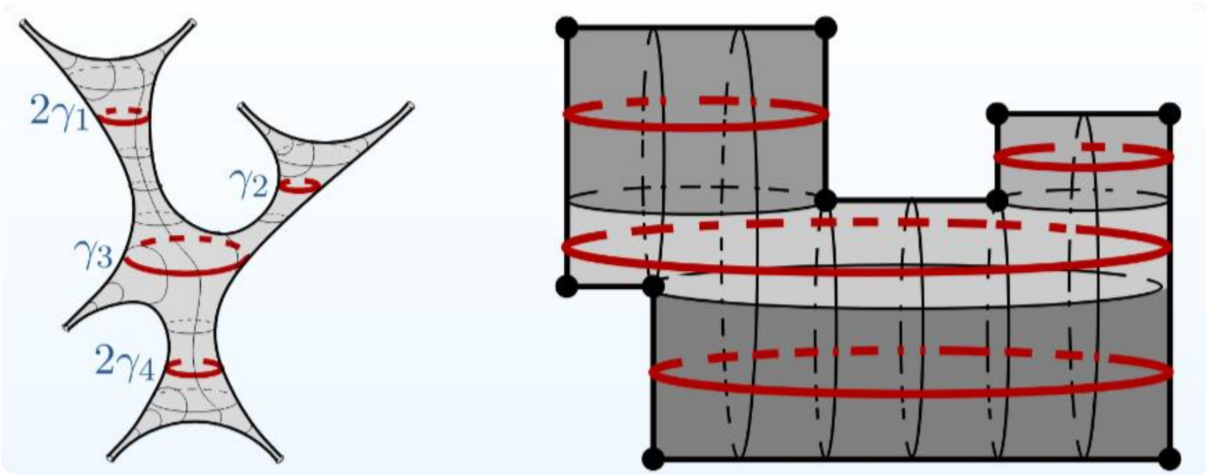
（Train tracks，摘自 Anton Zorich 的 note。）

(59) 面向工程师的 Space of multicurves 综述。



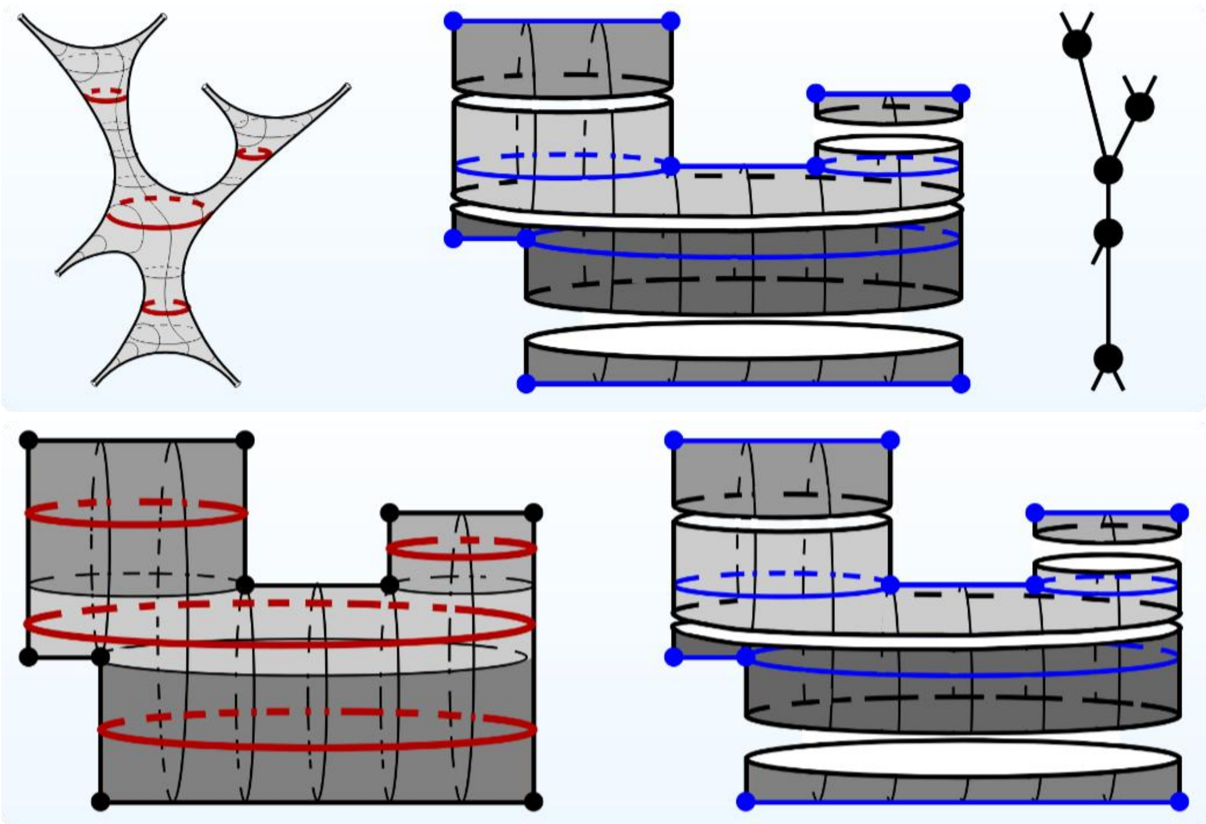
（Space of multicurves，摘自 Anton Zorich 的 note。）

(60) 面向工程师的 Hyperbolic and flat geodesic multicurves 综述。



（摘自 Anton Zorich 的 note。）

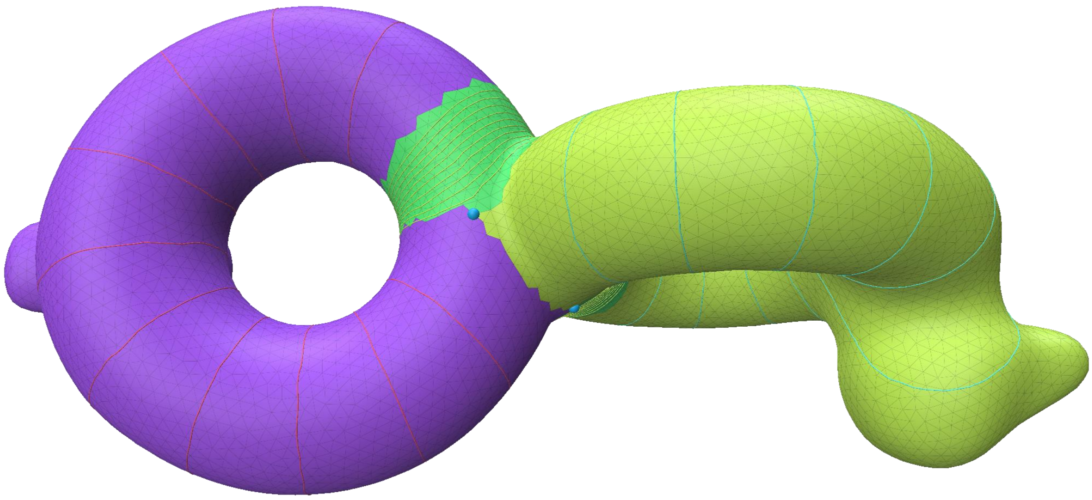
(61) 面向工程师的 Stable graph associated to a square-tiled surface 综述。



（摘自 Anton Zorich 的 note。）

前面的61个问题，可以延伸出更多的需要对相关的几何拓扑概念进行面向算法、面向应用的综述。这些概念和图示都需要进行研究，如何设计算法算出来，以及如何渲染进行可视化呈现。所有这些概念的算法综合起来，才能实现“四边形整体排列结构可控可设计”的超结构化四边形网格的研究，进而应用到CADCAE工业软件和高精尖技术的仿真中。几何概念和理论对应的算法不是一对一这样直接，而是需要从算法角度，重新梳理能够“算法化”的概念，一个算法可能对应若干几何概念，或者一个几何概念对应若干“算法”。

(62) 调和叶状结构的算法生成。



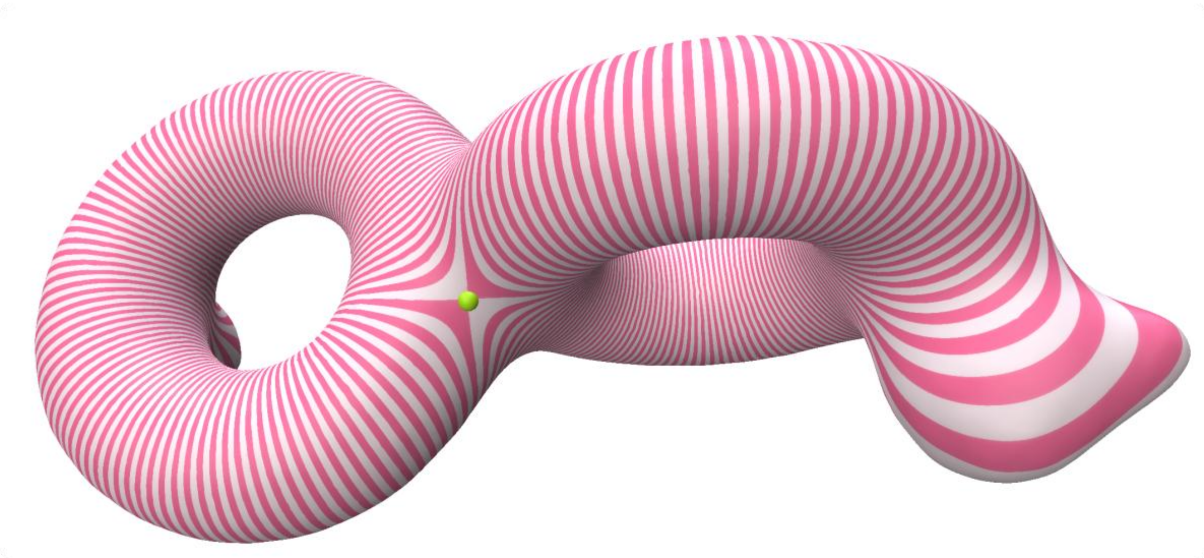
（叶状结构：赵辉用 Geometric 作图。）

(63) 调和叶状结构 GPU 并行加速算法。

(64) 调和叶状结构的逆向算法，从调和到非调和。

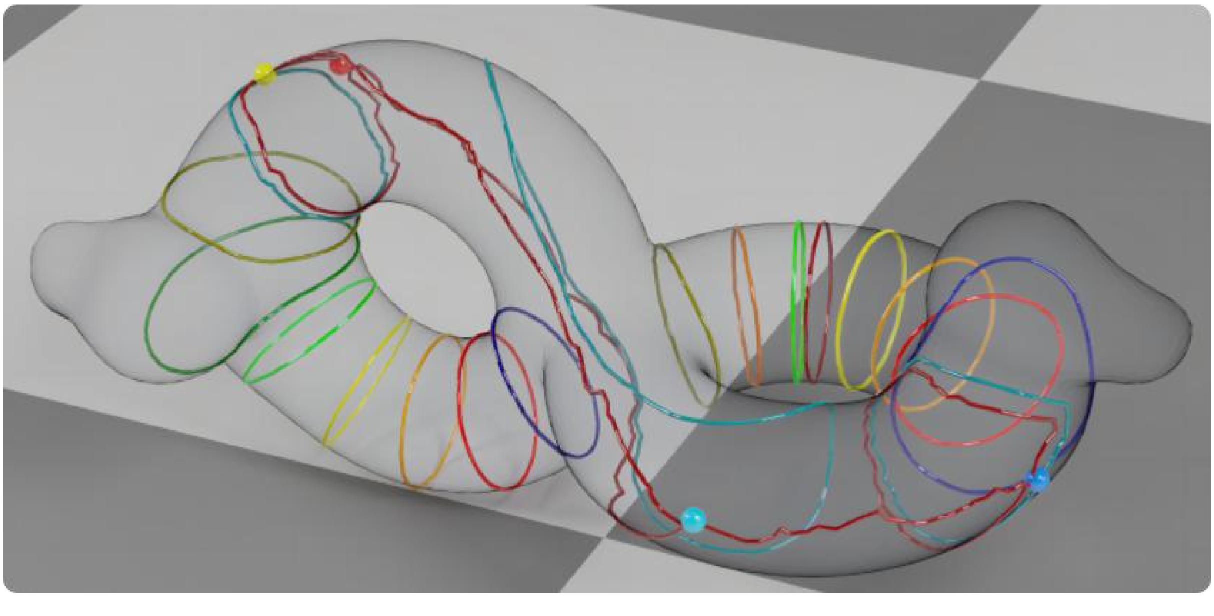
（叶状结构调和到非调和：赵辉用 Geometric 作图。）

(65) 调和叶状结构的零点移动路线可控可设计算法。



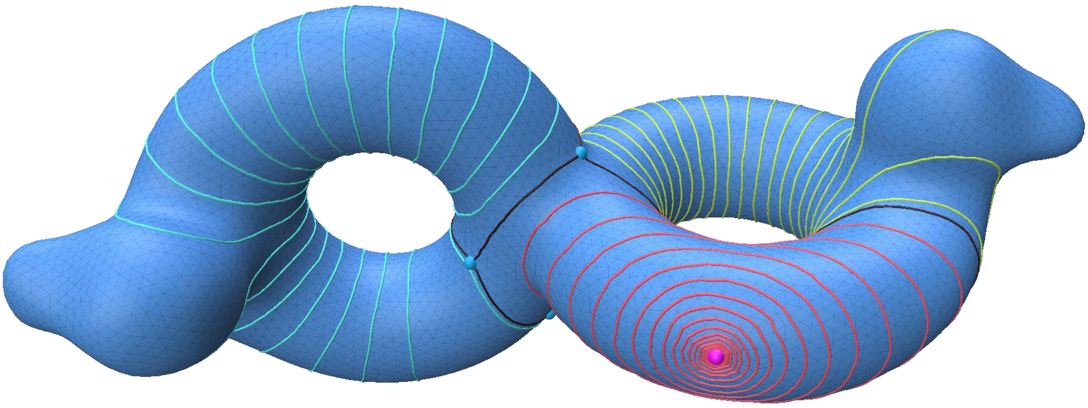
（叶状结构和零点：赵辉用 Geometric 作图。）

(66) 调和叶状结构 Ribbon Graph 生成算法。



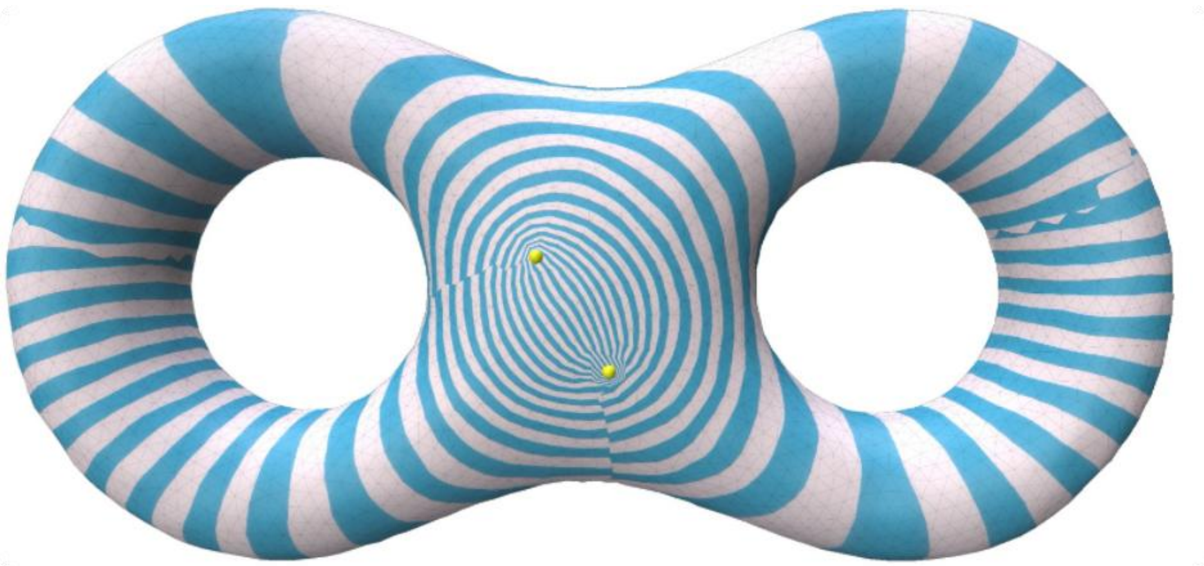
（叶状结构和零点：赵辉用 Geometric 作图。）

(67) 调和叶状结构带度数为 2 的极点算法。



（带度数为 2 极点的叶状结构：赵辉用 Geometric 作图。）

(68) 调和叶状结构带度数为 1 的极点算法。

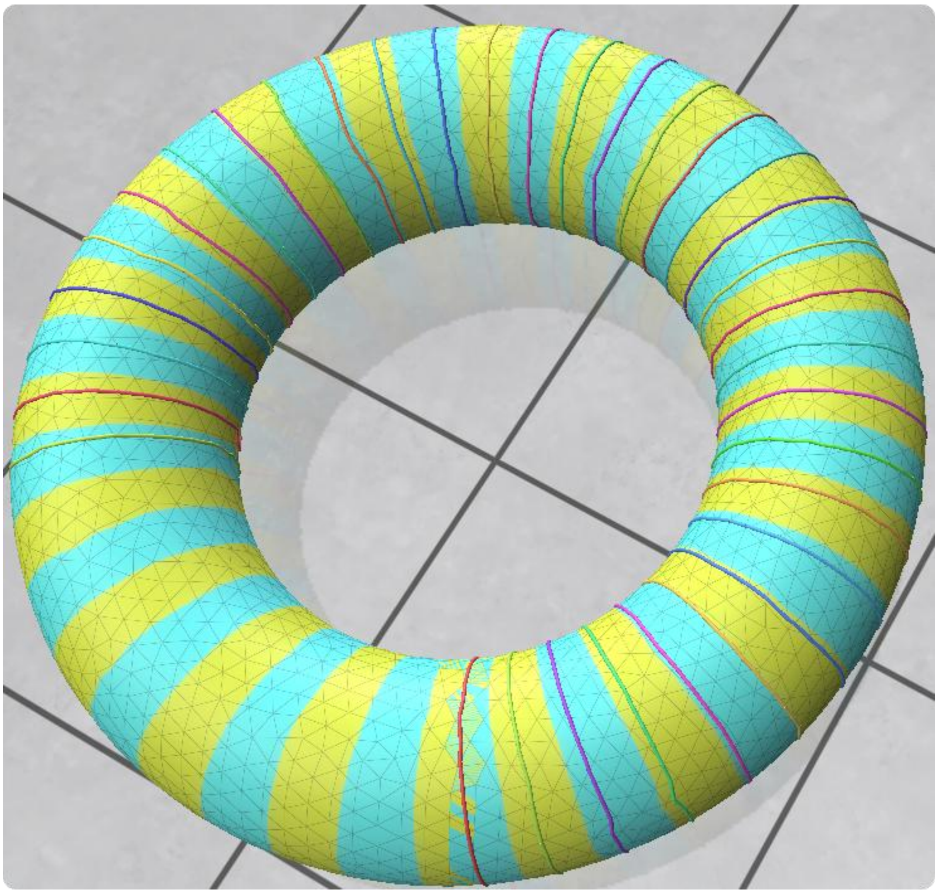


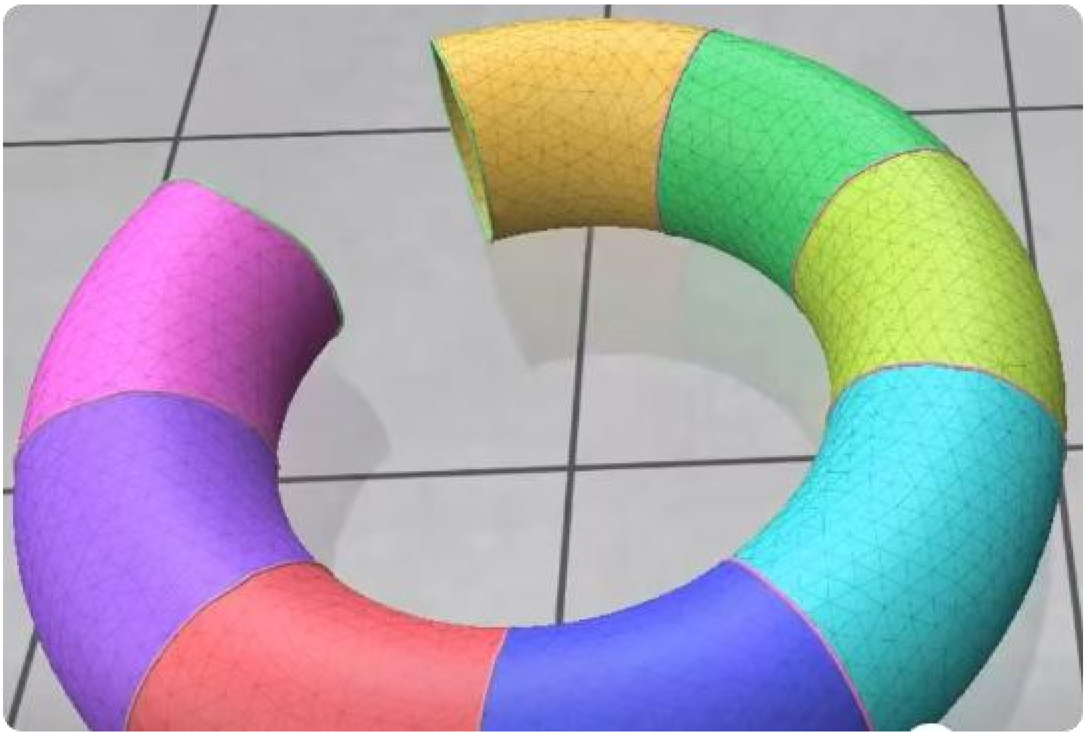
（带度数为 1 极点的叶状结构：赵辉用 Geometric 作图。）

(69) 调和叶状结构以高精度数值计算为基础的算法。

(70) 调和叶状结构叶子的绘制数据结构设计和渲染算法。

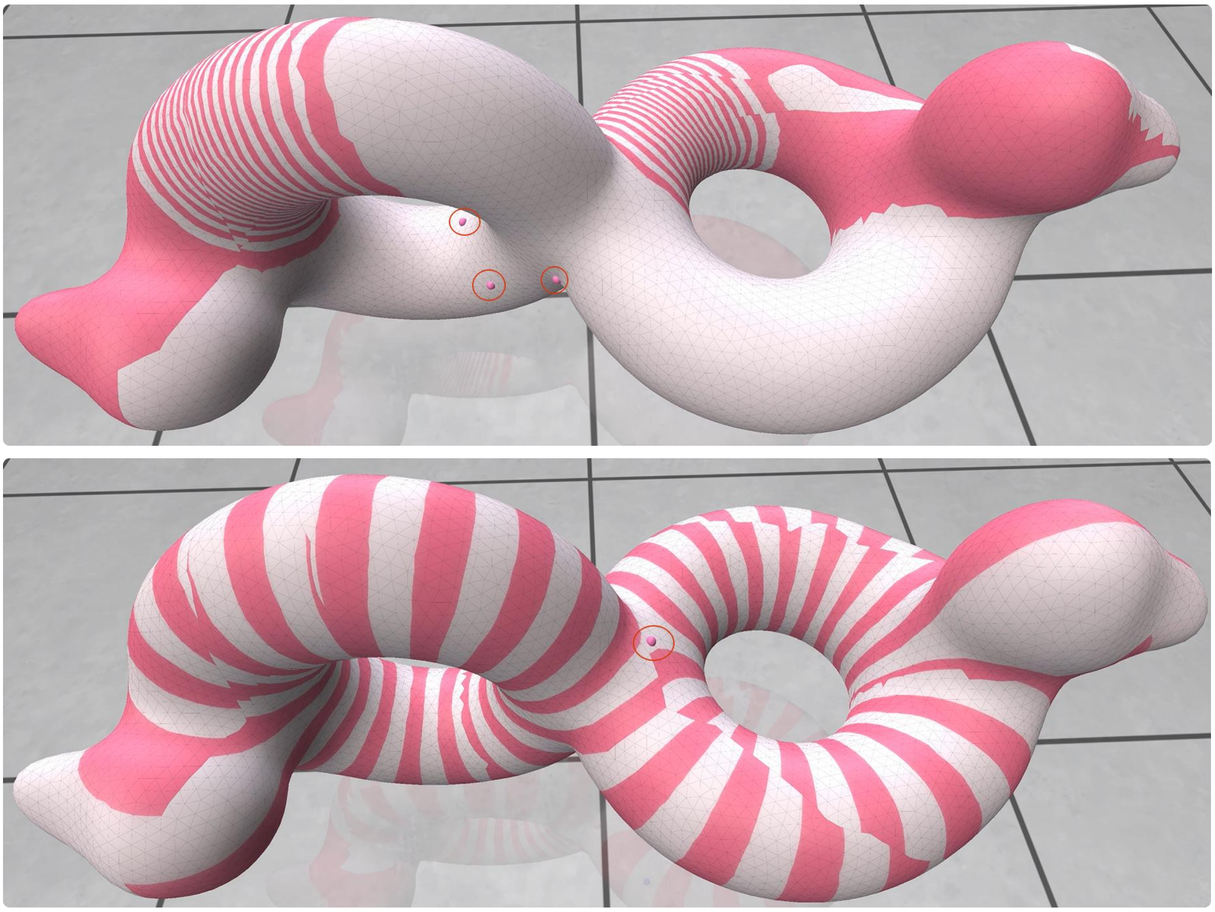
（71）调和叶状结构叶子的切割数据结构和算法。





（Geometric 作图。）

(72) 调和叶状结构零点合并分离可控算法。

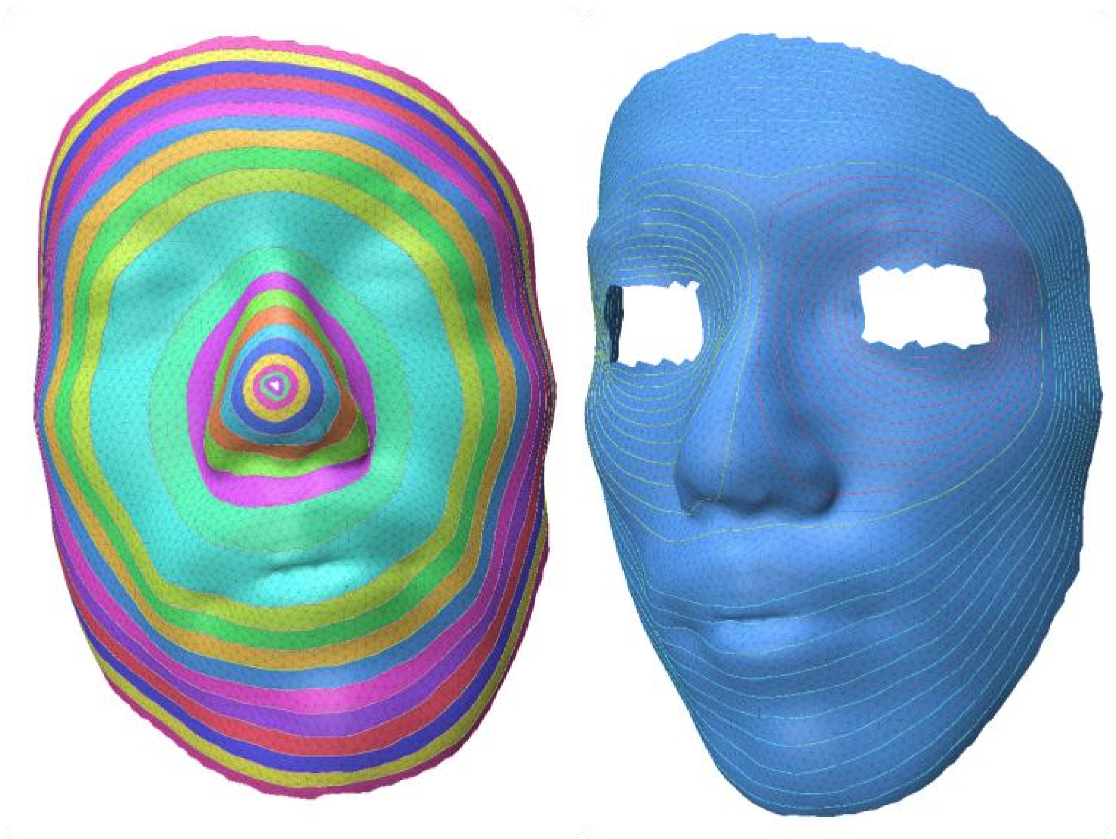


(叶状结构零点合并和分离：赵辉用 Geometric 作图。)

(73) 调和叶状结构 Critical Lines 绘制、生成、切割数据结构和算法。

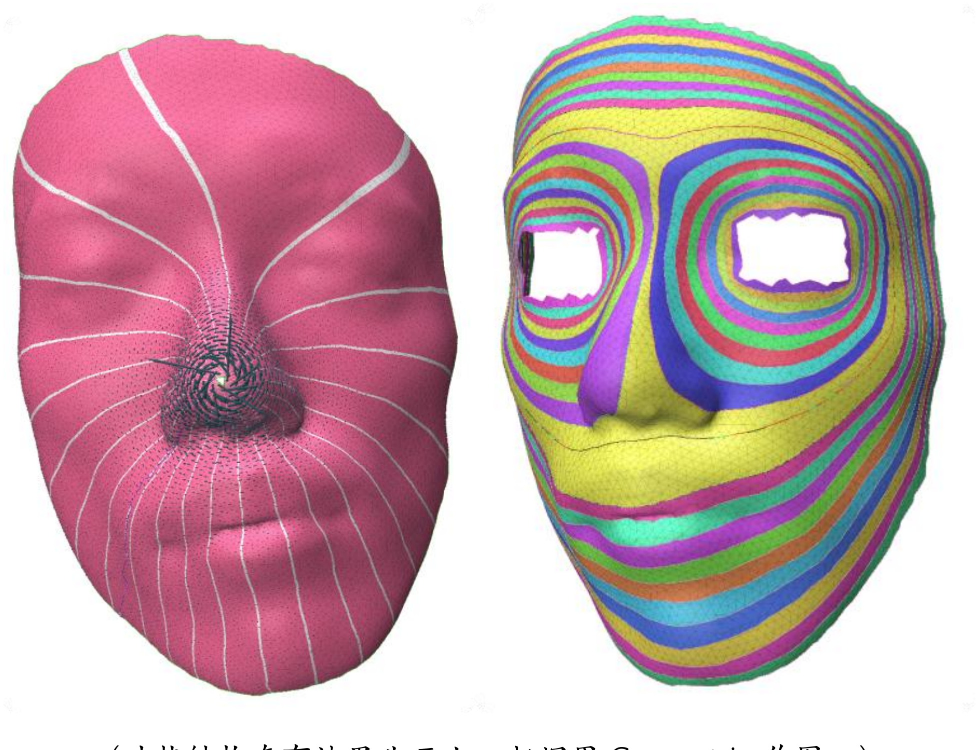
(叶状结构的 Critical Lines：Geometric 作图。)

(74) 调和叶状结构在有边界的曲面上的生成算法。



(叶状结构在有边界曲面上：赵辉用 Geometric 作图。)

(75) 调和叶状结构在有边界曲面上第二种算法。



(叶状结构在有边界曲面上：赵辉用 Geometric 作图。)

(76) 调和叶状结构在三维实体内部的算法。

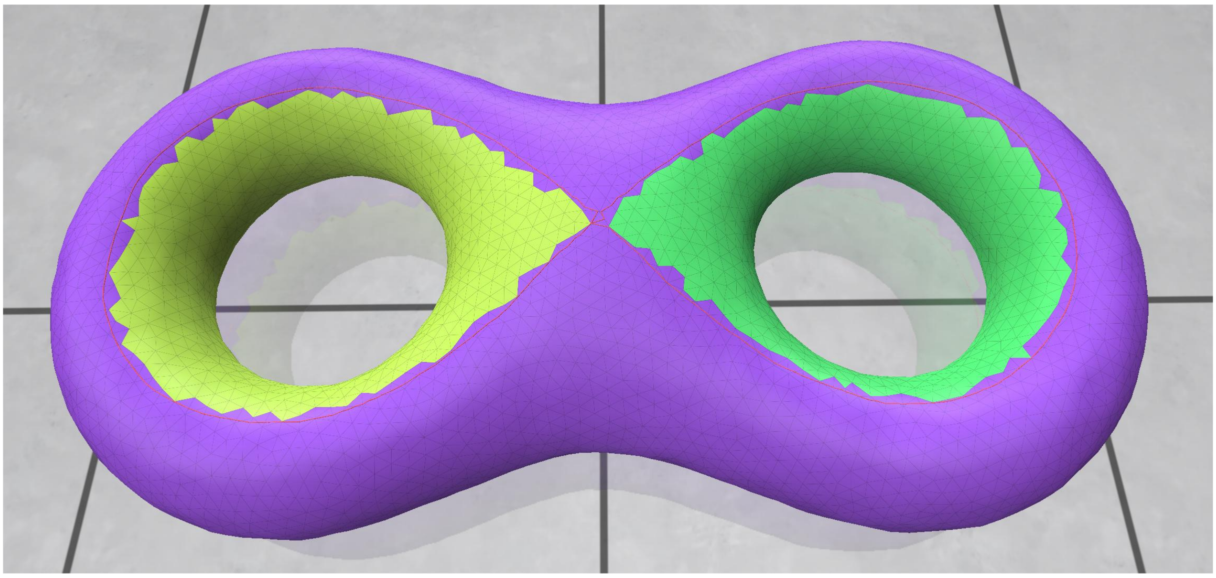
(77) 调和叶状结构在四边形、多边形网格上的生成算法。

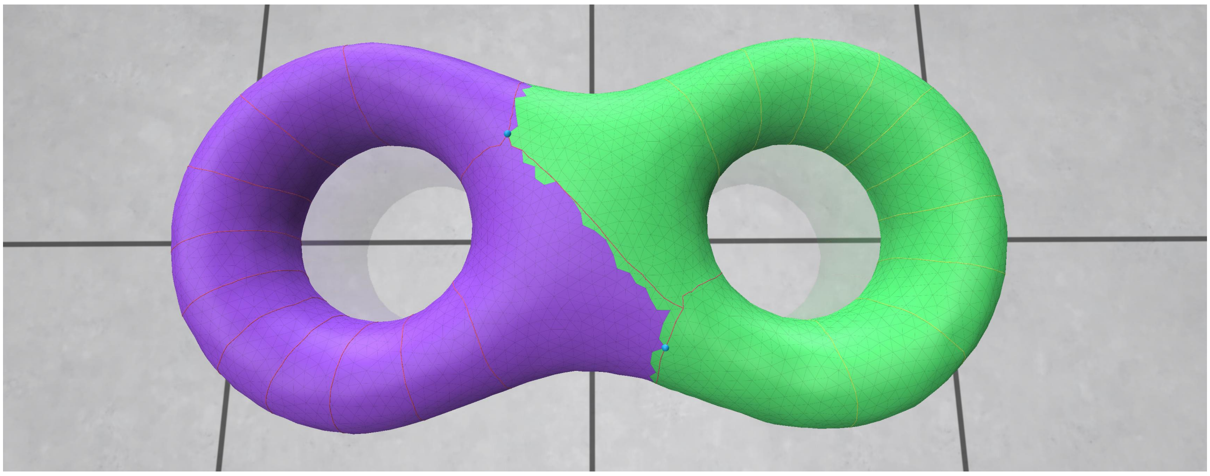
(78) 调和叶状结构能量收敛的分析证明。

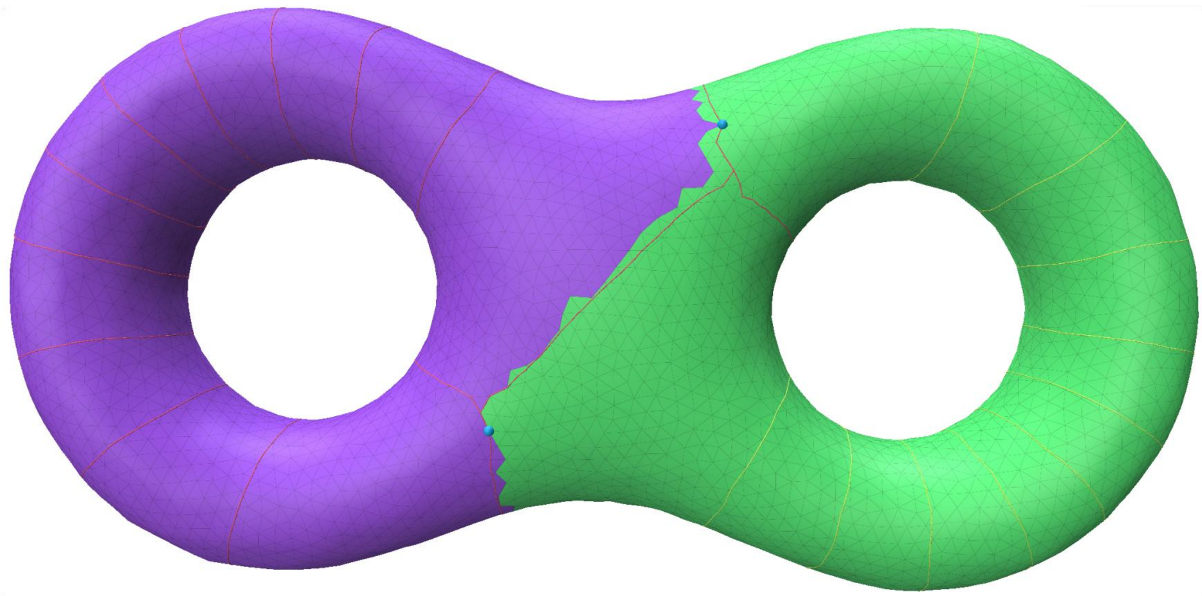
(79) 调和叶状结构无缝贴图渲染算法。

（无缝和有缝贴图：赵辉用 Geometric 作图。）

(80) 调和叶状结构零点连接关系研究图示算法。



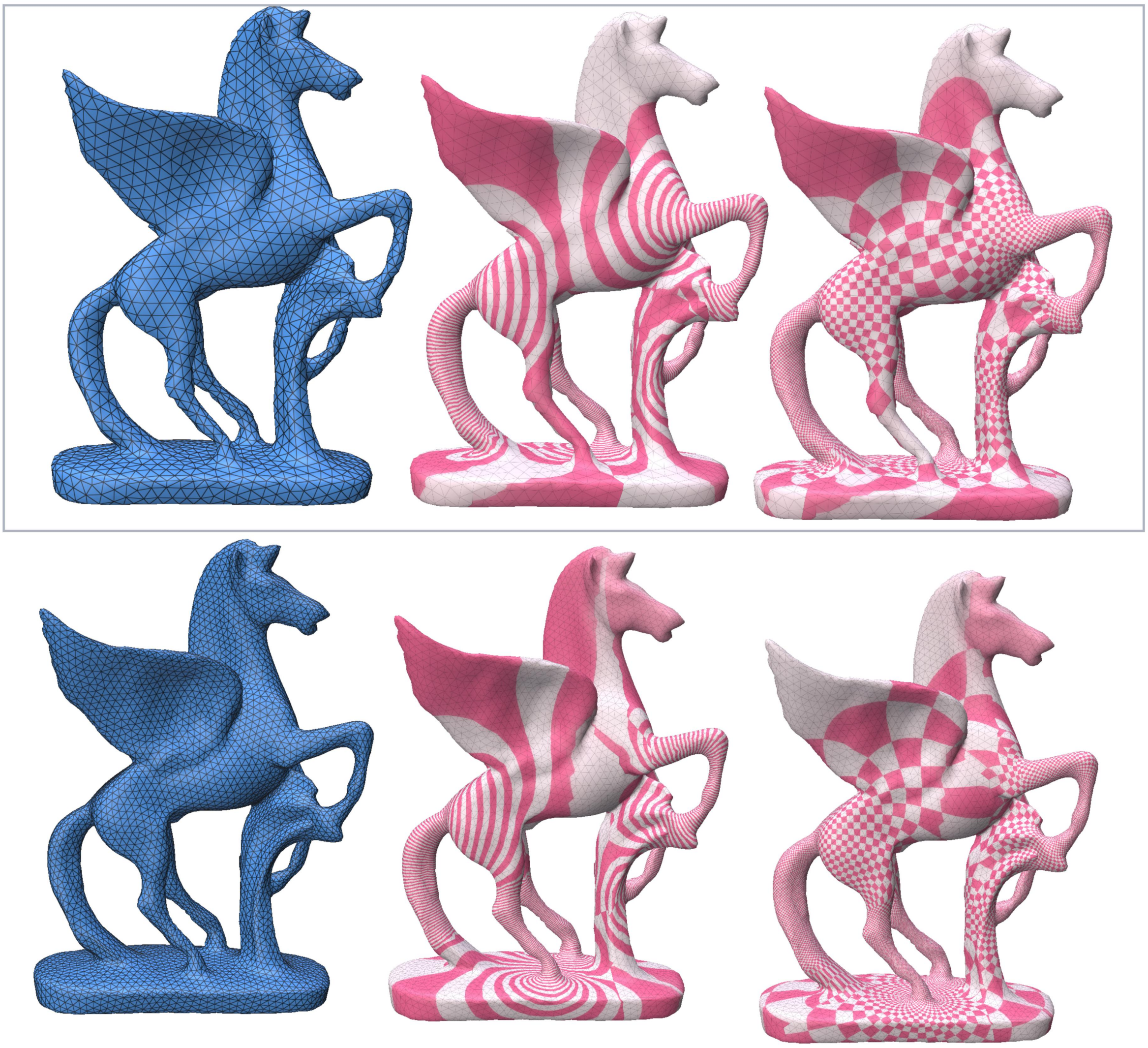




（赵辉用 Geometric 作图。）

(81) 调和叶状机构固定后，对应的垂直叶状结构算法。

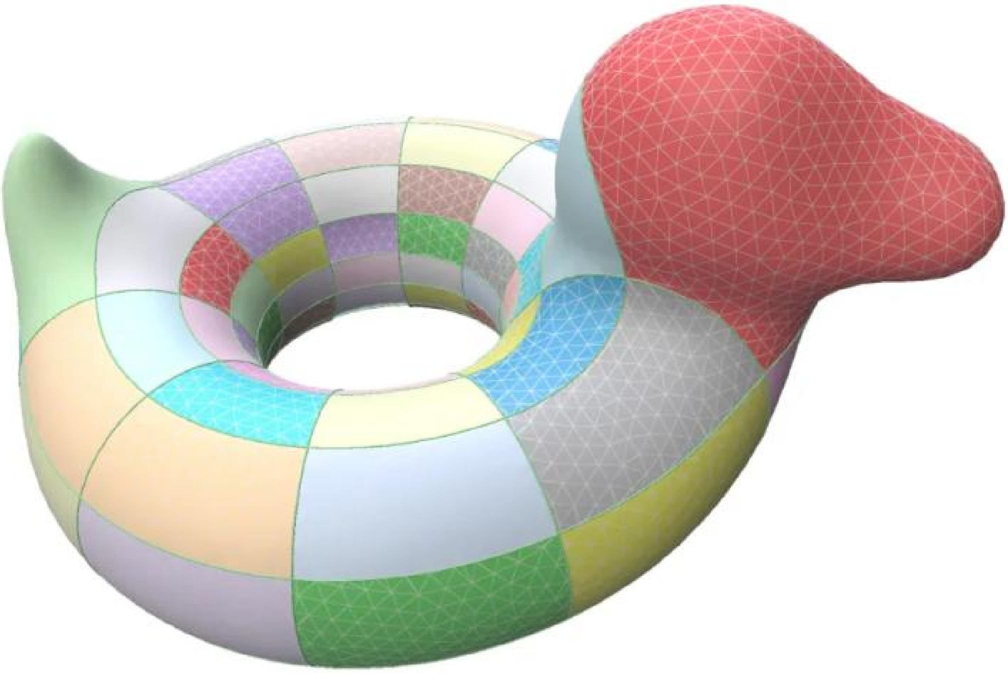
(82) 调和叶状结构固定后，对应的全纯二次微分可视化渲染算法。可视化算法很重要，因为整体几何结构的整体属性没办法用近似的方法得到，但是可视化可以近似，从视觉上进行初步的直观感受，再研究能捕获整体属性的算法。



（调和叶状结构和对应的全纯二次微分，赵辉用 Geometric 作图。）

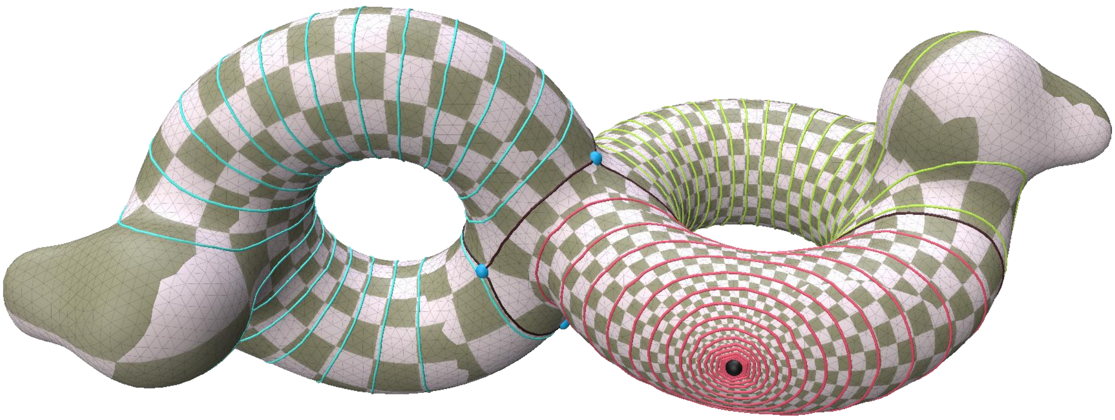
(83) 调和叶状结构固定后，对应的能捕获整体属性的全纯二次微分算法。

(84) 全纯二次微分的切割数据结构和算法，根据全纯二次微分的水平垂直相交线条切割为矩形。



（切割算法，赵辉用 Geometric 作图。）

(85) 带度数为 2 极点的亚纯二次微分可视化渲染算法。



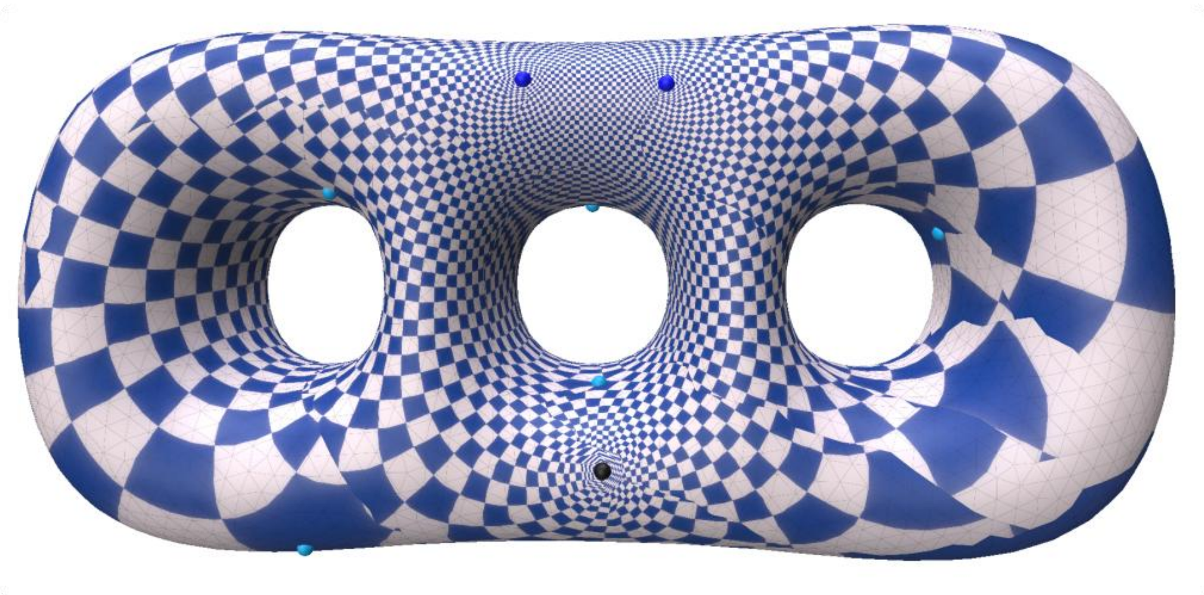
（带极点的全纯二次微分，赵辉用 Geometric 作图。）

(86) 带极点的亚纯二次微分捕获整体属性的算法。

(87) 带度数为 1 极点的亚纯二次微分可视化渲染算法。

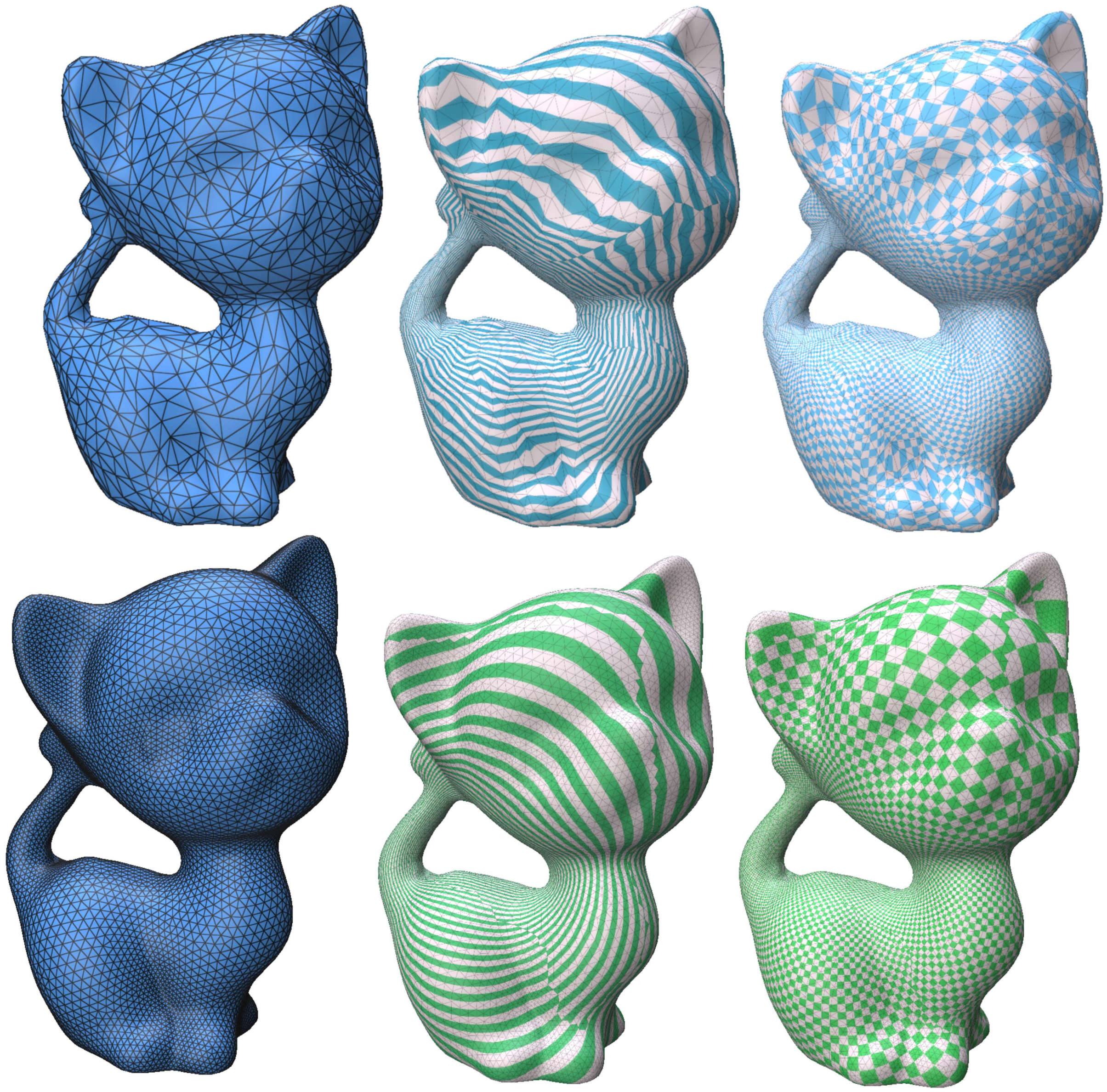
（带极点的全纯二次微分，赵辉用 Geometric 作图。）

(88) 亚纯二次微分无缝贴图算法



（有缝贴图，赵辉用 Geometric 作图。）

(89) 全纯二次微分无缝贴图算法。



（有缝贴图，赵辉用 Geometric 作图。）

(90) 超结构化四边形网格和全纯二次微分、亚纯二次微分的必要充分关系理论研究。四边形网格可以是全纯、亚纯四次微分，但是超结构化四边形网格是否只需要全纯二次或者亚纯二次即可，因为对于后续 CADCAE 流程重要的是四边形整体排列结构可控可设计的超结构化四边形网格，而不是没有整体排列结构的四边形网格。

(91) 超结构化四边形网格的整体排列结构和叶状结构的零点连接关系的理论研究。

(92) 叶状结构零点连接关系的可控算法研究。

(93) 全纯二次微分零点连接关系的可控算法研究。

(94) 叶状结构的叶子封闭和无限不封闭两种情况 A，和无理数有理数两种情况 B，对于 A=》B 的对应进行理论研究。

(95) 对于标价场等方法生成四边形网格的不足，对照有理数和无理数对于四边形网格的影响进行理论分析。

(96) 对标价场生成四边形网格方法和叶状结构不封闭叶子之间的关系进行理论研究。

(97) 对于超结构化四边形网格的整体排列结构，研究哪些或者哪类排列对等几何分析起到决定作用。

(98) 对于超结构化四边形网格的整体排列结构，研究哪些或者哪类排列对样条曲面生成起到决定作用。

(99) 对于超结构化四边形网格的整体排列结构，研究哪些或者哪类排列六面体网格生成的六面体整体排列结构起到决定作用。

(100)研究超结构化四边形网格的整体排列结构是否能唯一决定某种约束下的一个六面体网格的生成，也就是研究超结构化四边形网格对于六面体网格生成的必要和充分条件。

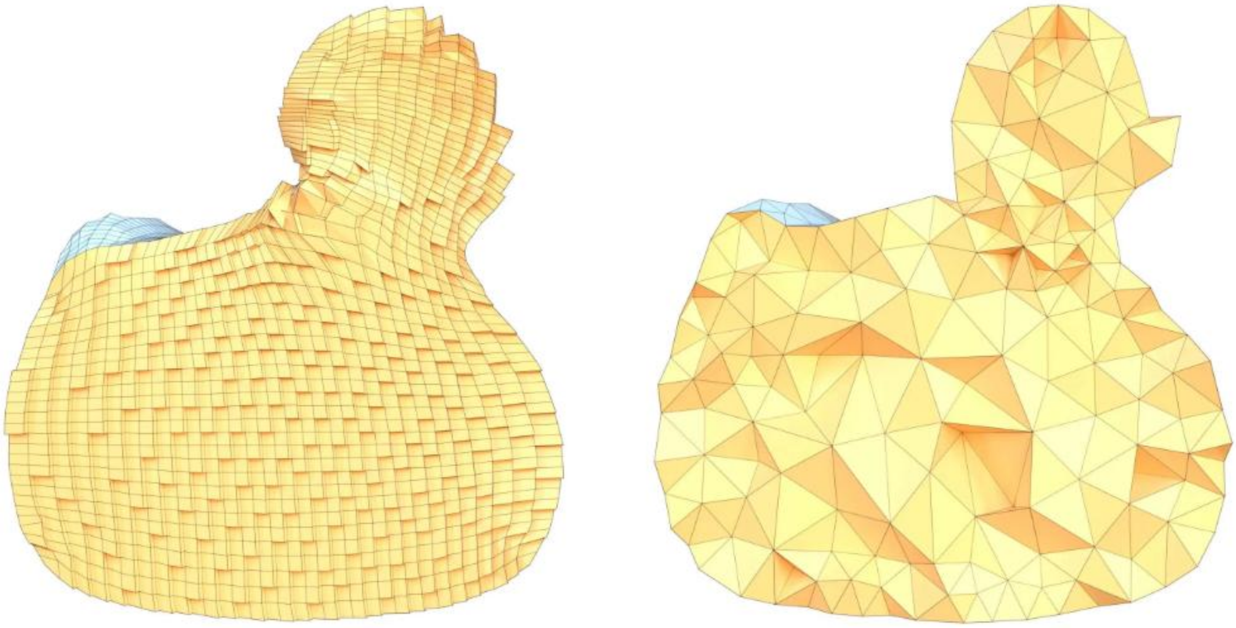
(101)研究是否可以对超结构化四边形网格的整体排列结构进行分类。

(102)对于超结构化四边形网格的整体排列结构，研究哪些或者哪类排列 T-样条曲面生成起到决定作用。

(103)对于超结构化四边形网格的整体排列结构，研究哪些或者哪类排列对工业软件里的水密要求起到决定作用。

(104)对于超结构化四边形网格的整体排列结构，研究哪些或者哪类排列对有限元计算的收敛起到决定作用。

(105)对于超结构化四边形网格的整体排列结构，研究哪些或者哪类排列对有限元计算的计算精度起到决定作用。



(106)超结构化四边形网格在整体排列结构不变的情况下，四边形数量的多少是否会对有限元计算的收敛性，精度、等几何分析带来影响。

(107)超结构化四边形网格对于发动机叶片设计和仿真作用的研究。

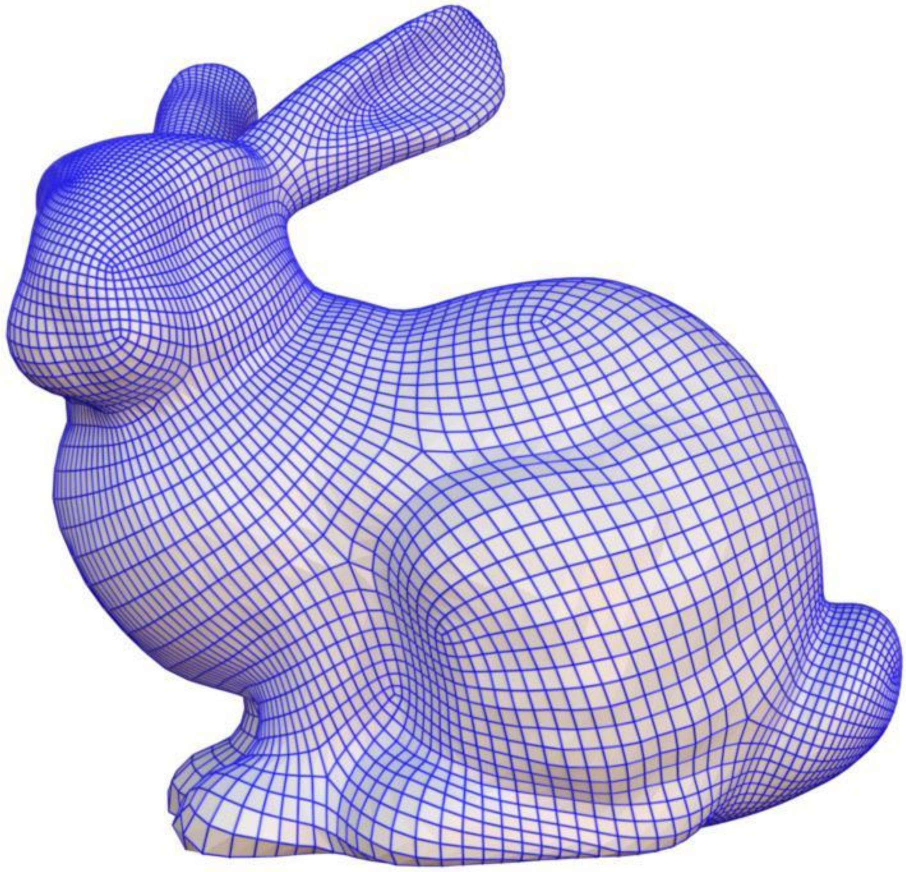
(108)超结构化四边形网格在汽车造型和仿真作用的研究。

(109)超结构化四边形网格对于飞机、轮船造型设计作用的研究。

(110)超结构化四边形网格对于其他工业应用的作用的理论、算法、实现研究。

(111)有限元计算=网格+计算，之前学术界研究重点在后面计算上，没有对网格的不同整体排列结构是否需要设计不同的计算方式进行研究。因此需要研究计算如何根据网格的整体排列进行对应的设计。

(112)超结构化四边形网格的局部质量优化算法研究。在确定了整体排列结构之后，如何优化特征线、局部的四边形为近似正方形等质量标准，需要进行大量的算法研究，可以借鉴当前的没有整体排列结构越苏的四边形网格质量优化的算法。

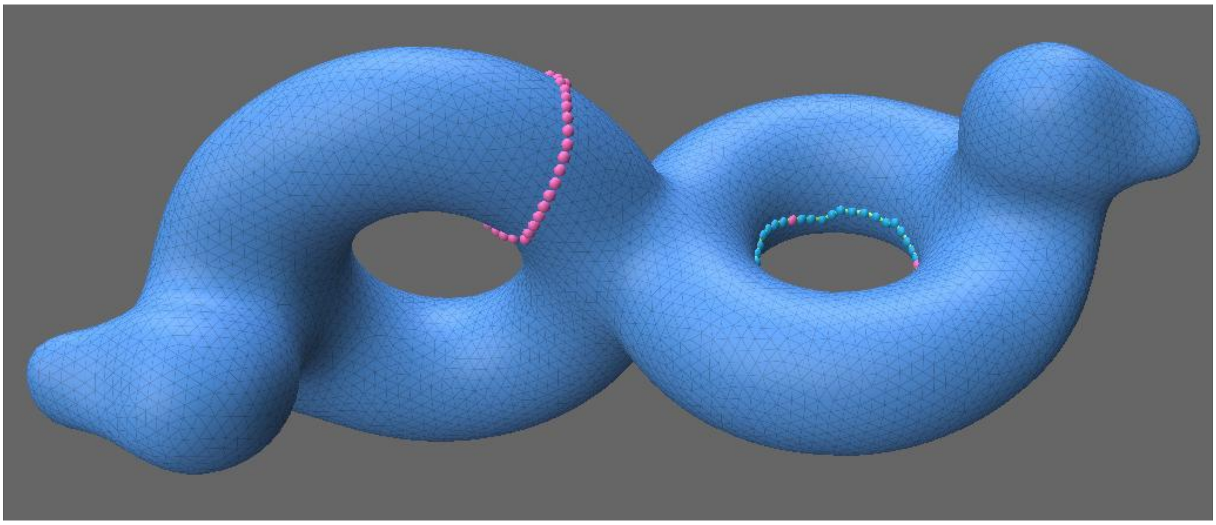


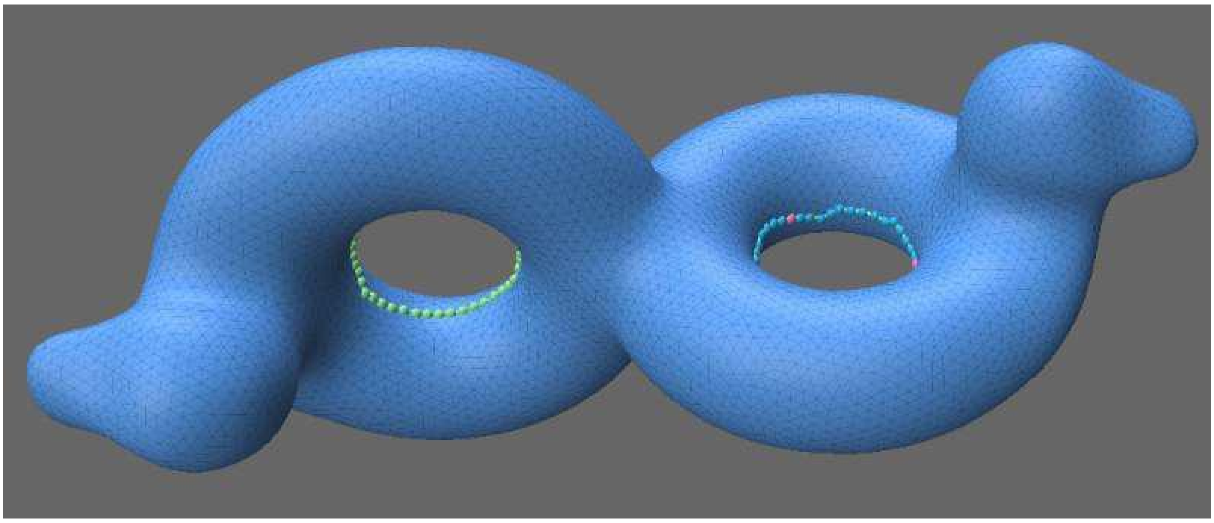
(113)调和微分一形式是调和叶状结构的子集，用调和叶状结构的算法院里，研究如何生成微分一形式。

(114)当前调和微分一形式的算法只能生成相对于当前度量的调和结果，研究不受限于当前网格度量的调和一形式算法。

(115)调和叶状结构和全纯二次微分等算法里的求解器数值计算研究，例如 Gurobi，COPT，Mosek，OSQP 等等。同一个算法，可能换一个求解器，就无法稳定求解，因此需要对各种求解器的数值计算进行实验分析和研究。超结构化四边形网格追求的是实战落地驱动，因此即使算法理论上比较完善，最终还需要依赖函数库、求解器稳定的计算出来具体结果。常见的情况是不同的问题，不同的数据，不同的算法，即使最后优化模型一样，也需要用不同的求解器实现。

(116)如何生成网格上的环带 loop，当前的 loop 生成算法可以生成基本的 loop，但是如果需要生成绕圈方式可控的 loop，就只能用手工方法，因此需要研究自动化的算法。



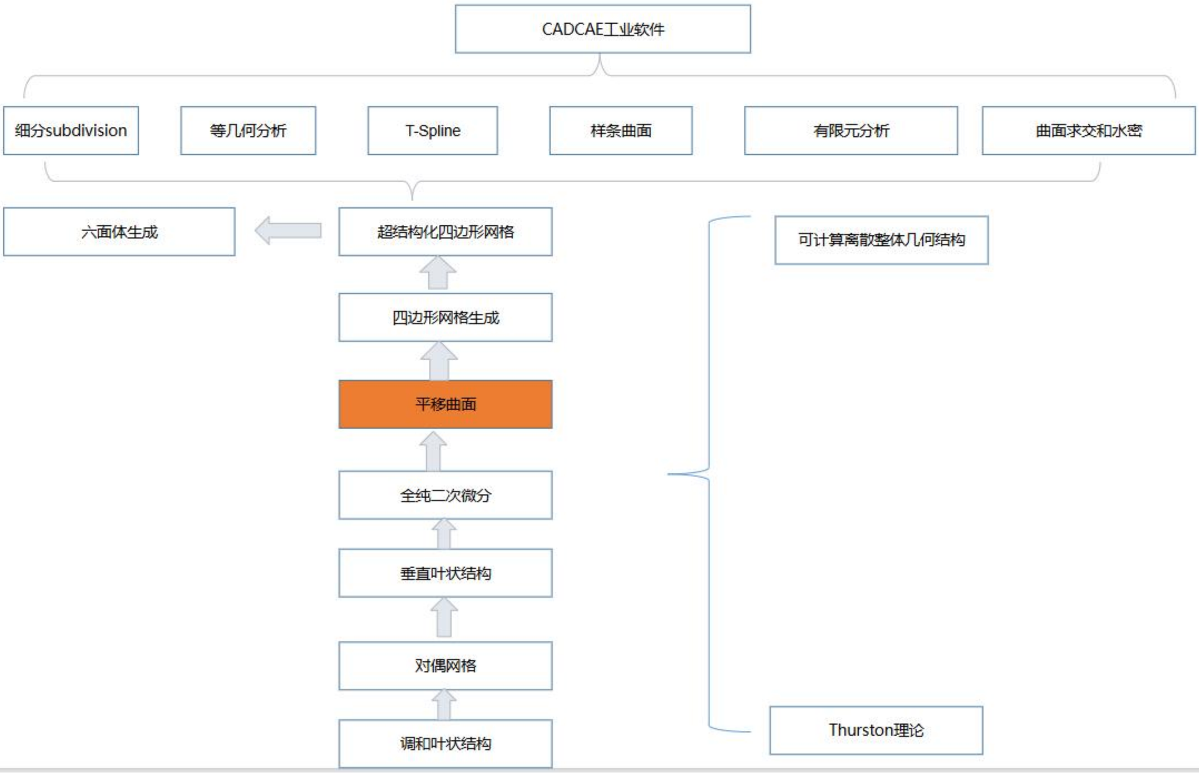


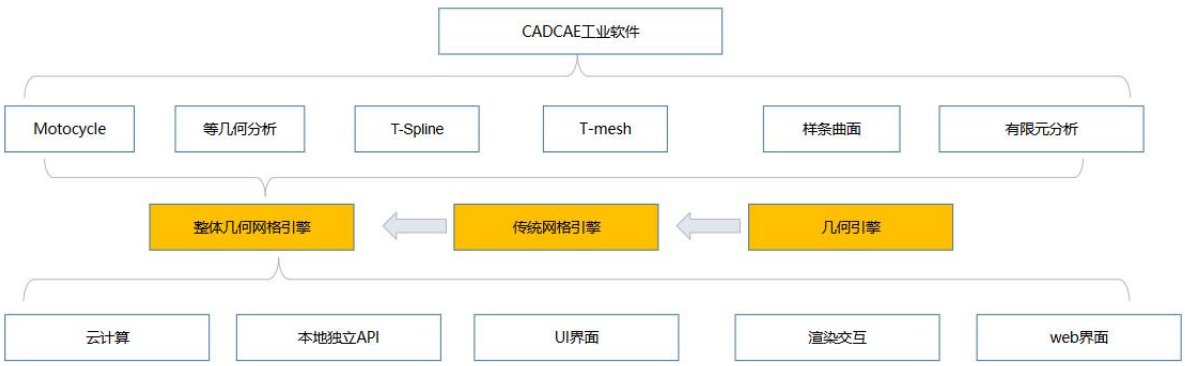
（Geometric 作图。）

(117)调和叶状结构、全纯二次微分、Billiards、Square-Tiling 等所有算法的 Python 接口代码实现研究。

(118)超结构化四边形网格软件架构研究，超结构化四边形网格内容需要数百种算法和模块，因此需要研究相匹配的软件架构来高效的组合这些算法。

(119)超结构化四边形网格引擎研究。当前 CADCAE 工业软件有几何引擎、网格引擎等。超结构化四边形网格需要以引擎的形式为 CADCAE 工业软件的上层应用提供 API。





(120)超结构化四边形网格的渲染引擎研究。可视化渲染是超结构化四边形网格研究的必要条件，是精神支柱，是驱动力的来源。因此需要研究如何高效多样的对算法的结果、中间计算数值、各种元素进行交互式的渲染呈现。

(121)根据超结构化四边形网格，在封闭高亏格曲面上生成完整的样条曲面代码研究。

(122)输入高规格网格上的超结构化四边形网格，进行等几何分析的生成和仿真代码研究。

(123)Billiards 台球桌生成算法研究和代码实现。
(124)设计符合要求的输入多边形，生成平移曲面算法研究和代码实现和可视化研究。
(125)根据多边形，计算平移曲面的亏格 genus 算法研究和代码实现。
(126)Arnold’s problem 设置的可视化算法研究和代码实现。
(127)通过 Critical graph 生成网格曲面的算法研究和代码实现。
(128)计算亏格为 1 的 Torus 上方块平铺方式数量的算法研究和代码实现。
(129)interval exchange permutation 的计算算法研究和代码实现。
(130)从 interval exchangetransformation 计算 strata 算法研究和代码实现。
(131)平移曲面 Cut and Paste 算法和可视化研究和代码实现。
(132)输入符合要求的多边形，生成半平移曲面的算法研究和代码实现。
(133)torus 模空间可视化算法研究和代码实现。
(134)Zippered Rectangles 的算法研究、代码实现、可视化渲染。
(135)Rauzy – Veech induction 的可视化渲染、算法研究、代码实现。
(136)计算 counting functions of cylinders 的算法研究。
(137)Wind tree Surface 算法研究、代码实现、可视化呈现。
(138)计算 Count of closed geodesics and of saddle connections on translation surfaces 的算法研究、代码实现。
(139)Closed trajectories and generalized diagonals 的算法研究、代码实现、可视化渲染。
(140)Strata 的 Counting volume 计算算法研究、代码实现。
(141)square-tiled surfaces 算法研究、代码实现、可视化渲染。
(142)Canonical double cover defined by a quadratic differential 算法研究、代码实现、可视化呈现。
(143)Admissible diagrams 算法研究、代码实现、可视化渲染。
(144)Encoding square-tiled surfaces by pairs of permutations 算法研究、代码实现、可视化渲染。
(145)1-cylinder surface as a pair of permutations 的超结构化四边形网格生成算法研究、代码实现、可视化渲染。
(146)1-cylinder 的超结构化四边形网格对于有限元计算、等几何分析、样条曲面生成关系的理论分析、代码实现、算法研究。
(147)Meanders and arc systems 的算法研究、代码实现、可视化渲染。
(148)Pairs of transverse multicurves as square-tiled surfaces 算法研究、代码实现、可视化渲染。
(149)Train tracks 算法研究、代码实现、可视化渲染。

(150)Stable graph associated to a square-tiled surface 算法研究、代码实现、可视化渲染、超结构化四边形网格生成。

(151)通过输入超结构化四边形网格的整体排列方式，生成 squre-tiling 四边形网格。

(152)网格上的环带 loop 绕圈方式只能决定超结构化四边形网格的水平排列方式，还需要和垂直排列方式组合起来，因此需要研究两者的组合关系。

(153)超结构化四边形网格的水平环带会把网格分割为圆柱 cylinder，因此需要研究 cylinder 的组合方式如何决定超结构化四边形网格的里四边形的整体排列方式。这些都需要上述模空间等各种前沿几何拓扑理论的综合研究，找到方法。

(154)超结构化四边形网格的整体排列结构是输入，因此需要研究如何利用上述各种几何概念，设计算法可以方便的得到和确定这个输入。而这个输入的设置是和后续的等几何分析、有限元计算、样条曲面生成相关的。

(155)超结构化四边形网格的研究，需要兼容当前四边形网格的研究结果和理论，因此从相应的角度对现有研究算法进行综述，分析总结当前四边形网格生成方法和路线在理论上、代码上、算法上能达到的和不能达到的。

(156)全纯二次微分有水平调和叶状结构和垂直调和叶状结构两个组成部分，如果水平调和叶状结构的叶子是封闭的，那么称为是 Jenkins – Strebel differentials。理论上在当前的曲面度量固定情况下，水平叶状结构固定了，对应的垂直叶状结构也就固定了，无法自由选择是封闭的还是不封闭的，在超结构化四边形网格生成研究中，就需要垂直也是封闭的，从而就需要研究不依赖于度量的垂直叶状结构。如果仅仅是 Strebel Differentials 那么就无法使得垂直叶子封闭，因此无法得到四边形网格。但是当前学术界还没意识到这是理论上的原因，不是算法和代码实现的原因。

(157)标价场（Cross fields）无法在理论上确保生成四边形网格的原因就是因为无法确保水平和垂直叶状结构都是封闭的叶子，因此只能用数值上近似的算法进行强行近似，从而就无法控制近似到哪一种绕圈的四边形整体排列结构上，从而通常会生成很复杂的排列结构。但是当前学术界还没意识到这是理论上的原因，不是算法和代码实现的原因。

(158)当前无缝参数化作为四边形网格生成的一个路线，从理论上就无法保证能够得到四边形网格的原因也是无法参数化对应的平叶状结构得到的也是不封闭的叶子，因此对应的算法理论上就无法保证稳定，因此算法、代码实现上就无法得到鲁棒的结果。但是当前学术界还没意识到这是理论上的原因，不是算法和代码实现的原因。

(159)六面体网格的表面就是四边形，超结构化四边形网格生成因为需要用到二维黎曼面上所有几何拓扑理论，因此是否可以在 CADACAE 工业软件应用的标准和目标上决定内部六面体的生成，从而六面体生成不需要三流形的几何拓扑理论，

这是需要研究的内容。因为超结构化四边形网格和六面体生成的驱动都是来源于工业应用，而不是为了生成而生成。

参考文献

1. 赵辉，可计算离散整体几何结构，2025 年 8 月，Online，https://meshdgp.github.io/
2. 赵辉，可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展，2025 年 8 月，Online，https://meshdgp.github.io/
3. 赵辉，网格处理代码平台 meshdgp，2025 年 8 月，Online，https://meshdgp.github.io/
4. 赵辉，系列网格方桌会议，2025 年 8 月，Online，https://meshdgp.github.io/
5. 赵辉，中国科协 2025 年十大工程技术难题之“复杂模型的设计-仿真-制造一体化算法与理论”的解决方案路线图，2025 年 8 月，Online，https://meshdgp.github.io/
6. 赵辉，超结构化四边形网格，2025 年 8 月，Online，https://meshdgp.github.io/
7. 赵辉，举例说明：Umbilic Torus，2025 年 8 月，Online，https://meshdgp.github.io/
8. 赵辉，微分几何可视化代码教学创新研讨会，2025 年 8 月，Online，https://meshdgp.github.io/
9. 赵辉，量子力学的可计算离散整体几何结构解释，2025 年 8 月，Online，https://meshdgp.github.io/
10. 赵辉，提出一个科学问题：超结构化四边形网格对于有限元计算收敛性和精度的影响，力学大会 2025， 2025 年 7 月
11. 赵辉，可计算离散整体几何结构原创几何拓扑代码平台：Geometric，2025 年 8 月，Online，https://meshdgp.github.io/
12. 赵辉，现代化计算机图形学，2025 年 8 月，Online，https://meshdgp.github.io/